SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Užduotis ir sprendimus parengė VU MIF docentas Romualdas Kašuba

2009 metai

1. Sveikas teigiamas skaičius yra vadinamas *marijampolietišku*, jeigu jis:
   (♠) yra keturženklis;
   (♣) visi jo skaitmenys yra skirtingi;
   (♥) visi jo skaitmenys yra nelyginiai;
   (♦) jis dalijasi be liekanos iš 9.
   (A) Nurodykite vieną *marijampolietišką* skaičių.
   (B) Nurodykite tris *marijampolietiškus* skaičius.
   (C) Kiek iš viso yra *marijampolietiškų* skaičių?

Sprendimas.

(A) Tinka, pavyzdžiui, skaičius 1539, nes jis keturženklis, jo skaitmenys yra nelyginiai ir skirtingi. Jis taip pat dalijasi iš 9, nes jo skaitmenų suma

$$1 + 5 + 3 + 9 = 18$$

dalijasi iš 9.

(B) Tinka ir bet kurie skaičiai, gaunami iš 1539, perstatant jo skaitmenis, pavyzdžiui, dar galima paimti 1359 ir 9531.

(D) Kadangi yra 5 nelyginiai skaitmenys

$$1, 3, 5, 7, 9,$$

o mums reikės panaudoti 4 iš jų, tai pirmiausiai galime suskaičiuoti jų visų sumą

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

ir pasižiūrėti, kas būtų, jei iš jos atimtume vieną – visais galimais būdais:

$$25 - 1 = 24,$$
$$25 - 3 = 22,$$
$$25 - 5 = 20,$$
$$25 - 7 = 18,$$
$$25 - 9 = 16.$$

Tik vienas skirtumas yra dalus iš 9 – kai neimame skaitmens 7. Vadinasi tik keturženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų

$$1, 3, 5 \text{ ir } 9$$

tenkina uždavinio sąlygą.

Kadangi keturis skirtingus skaitmenis perstatinėdami vietomis iš viso galime gauti 24 skirtingus skaičius, tai visi tie skaičiai ir tenkins uždavinio sąlygą, o daugiau kitokių skaičių negali būti.

Todėl (C) dalies atsakymas yra 24.

Atsakymai:
(A) Pvz.: 1539;
(B) Pvz.: 1539, 1359, 9531;
(C) Yra 24 *marijampolietiški* skaičiai.

2. Pirmojo Marijampolės dangoraižio, kuriame yra dvi laiptinės, bendrijos pirmininkas Brusokas daro rinkliavą naujiems daugiabučio namo butų numeriams įsigyti. Arminas Trupinys-Trupinėlis iš 100-tojo buto antroje laiptinėje tiesiai paklausė, kodėl toje laiptinėje reikia surinkti 40% daugiau pinigų, nors butų ir vienoje, ir kitoje laiptinėje yra vienodai. Pirmininkas Brusokas nemirktelėjęs pareiškė, kad kiekvienas dviženklis buto numeris kainuoja dvigubai, o triženklis

buto numeris – net trigubai daugiau negu bet kuris vienaženklis buto numeris. Kiek butų yra tame pirmajame Marijampolės dangoraižyje?

Sprendimas. Iš sąlygos matome, kad tame name yra dvi laiptinės. Sakykime, kad kiekvienoje iš jų yra po k butų, tada visame name yra $2k$ butų.

Tada pirmoje laiptinėje yra 9 butai, kurių numeriai, yra patys pigiausi, nes vienaženkliai skaičiai. Sakykime, kad vienas vienaženklis buto numeris kainuoja

$$a$$

litų, tada pagal sąlygą dviženklis buto numeris kainuoja

$$2a,$$

o triženklis buto numeris –

$$3a$$

litų.

Tada visi k pirmosios laiptinės butų numeriai kainuoja

$$(k-9)\cdot 2a+9a$$

litų, o visi kitos, laiptinės, kur gyvena Petras Trupinys, butų numeriai kainuoja

$$(99-k)\cdot 2a\ +(2k-99)\cdot 3a$$

litų.

Iš sąlygos

$$((99-k)\cdot 2a\ +(2k-99)\cdot 3a)=1{,}4((k-9)\cdot 2a+9a).$$

Suprastinę iš a gauname

$$((99-k)\cdot 2\ +(2k-99)\cdot 3)=1{,}4((k-9)\cdot 2+9).$$

Toliau viskas aišku – padauginus abi puses iš 5 gautume

$$10(99-k)\ +(2k-99)\cdot 15 = 7\ ((k-9)\cdot 2+9),$$

$$990-10k+30k-1485\ =14\ k-126+63,$$

$$20k-495\ =14\ k-63,$$

$$6k\ =\ 432,$$

$$k\ =\ 72.$$

Vadinasi, iš viso 2 laiptinių name yra

$$2k\ =\ 144$$

butai.

Atsakymas.

Name yra 144 butai.

3. (Iš dar neskelbtų sensacingų Jono Totoraičio archyve aptiktų tikrų žinių apie pirmąjį žinomą Marijampolės krašte išspręstą geometrinį uždavinį.)

Taškas M yra stačiakampio $ABCD$ kraštinės BC vidurio taškas, o taškas K priklauso stačiakampio kraštinei CD.

Be to, yra žinoma, kad

$$\angle KAM=\angle MAB.$$

Negi įmanoma tiek teturint nustatyti $\angle KMA$ didumą?

Sprendimas.

Pratęskime atkarpą AM iki susikirtimo su tiese CD taško L. Tada

$$\angle MAB=\angle MLC$$

(kaip vidaus priešiniai kampai), o kadangi iš sąlygos

$$\angle KAM=\angle MAB,$$

tai

$$\angle KAM=\angle MLC.$$

Vadinasi, ΔKAL yra lygiašonis, o jo pagrindas yra AL.

Kadangi statieji trikampiai

$$\Delta MBA \text{ ir } \Delta MCL$$

yra lygūs

$$(\angle MAB = \angle MLC \text{ ir remiantis sąlyga } MB = MC),$$

tai

$$MA = ML.$$

Vadinasi, KM yra lygiašonio trikampio pusiaukraštinė ΔKAL, išvesta iš lygiašonio trikampio viršūnės į jo pagrindą; todėl KM yra ir to lygiašonio

$$\Delta KAL$$

aukštinė, taigi KM su AM sudaro

$$90^{\circ}$$

arba statų kampą, kurio mes ir ieškojome.

Atsakymas. $\angle KMA = 90^{\circ}$.

4. Vienas sumanus tėvas Marijampolėje augino 10 vaikų ir su jais kas savaitę ruošdavo sekmadienio pietus. Vieną sekmadienio rytą jis buvo staiga iškviestas į darbą, bet nuramino vaikus sakydamas, kad iki pietų jis spėsiąs pargrįžti. Kad pabaigę ruošti pietus vaikai nenuobodžiautų ir neliūdėtų, jis išdalino jiems marškinėlius su numeriais

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

ir pasakė, kad jeigu jie vieni sugebės taip susėsti prie svetainėje stovinčio apskrito sekmadienio pietų stalo, kad bet kurių trijų greta sėdinčių brolių marškinėlių numerių suma bus

() nedidesnė už 15, tai jis kiekvienam broliui duos po 10 litų skatinamųjų pinigų;

() nedidesnė už 14, tai jis kiekvienam broliui duos jau po 20 litų skatinamųjų pinigų;

() nedidesnė už 13, tai jis kiekvienam vaikui duos net po 50 litų skatinamųjų pinigų.

(A) Ar įmanoma broliams gauti po 10 litų?
(B) Ar įmanoma broliams gauti po 20 litų?
(C) Ar įmanoma broliams gauti po 50 litų?

Sprendimas.

10 brolių su numeriais

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

tikrai gali susėsti taip, kad bet kurių 3 greta sėdinčių brolių numerių suma neprašoka 15. Pateikiame pavyzdį.

0
6 9
8 4
1 2
3 7
5

Todėl po 10 litų broliai uždirbti gali (pvz., jeigu susėstų taip, kaip ką tik buvo nurodyta).

Įrodysime, kad po 20 litų broliai uždirbti negali. Tam pakanka įrodyti, kad broliai negali susėsti taip, kad bet kurių trijų greta sėdinčių brolių numerių suma niekada neprašoka 14.

Tarkime, kad jie gali taip susėsti. Tada galime tarti, kad kaip praeitame pavyzdyje “aukščiausiai” sėdi brolis su numeriu 0. Tada likę 9 broliai gali būti suskirstyti į tris kaimyninių brolių trejetus po 3 brolius. Jeigu tų 3 trejetų suma numerių suma neprašoka 14, tai 9 nenulinių brolių numerių suma neprašoka

$$14 \cdot 3 = 42.$$

Bet 10 brolis yra su numeriu 0, vadinasi ir visų 10 brolių numerių suma neprašoktų 42, o ji juk yra

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Gautas prieštaravimas rodo, kad susėsti taip, kad išeitų po 20 litų, neįmanoma, vadinasi, juo labiau neįmanoma susėsti taip, kad ta suma būtų dar mažesnė.

Taigi ir uždirbti po 50 litų neįmanoma.

Atsakymas. (A) Taip (B) Ne (C) Ne

2010 metai

1. *Pačiame didžiausiame Suvalkijos akvariume, esančiame Marijampolės lopšelyje-darželyje "Nykštukas", plaukioja ne viena auksinė žuvelė, iš viso yra 280 žuvelių. Rūpestingi tėvai planuoja papildomai įleisti į tą akvariumą 60 auksinių žuvelių ir yra labai patenkinti suvokę, kad nuo to auksinių žuvelių dalis tame garsiajame Marijampolės akvariume padvigubėtų.*

Kiek auksinių žuvelių yra dabar tame akvariume?

Sprendimas

Įsivaizduojant, kad pradžioje akvariume ramiai sau jau plaukiojo

$$x$$

auksinių žuvelių, tai įleidus jų dar

$$60,$$

tų įstabių auksinių žuvelių jau būtų

$$x + 60.$$

Pagal nusakytas proporcijas

$$2 \cdot \frac{x}{280} = \frac{x + 60}{340}.$$

Palengvinus vardiklius panare daugyba iš 20 būtų

$$\frac{x}{7} = \frac{x + 60}{17}.$$

Todėl

$$17x = 7(x + 60)$$

ir .

$$x = 42.$$

Atsakymas.

Dabar tame akvariume yra

42

auksinės žuvelės.

2. *Bešvilpaujantis Suvalkijos berniokas per aritmetikos pamokas labai taupiai naudodavo skirtingus skaitmenis.*

Lygybėje

*0,** + 0,** + 0,** + 0,** = 1*

kiekvieną žvaigždutę berniokas tesutinka pakeisti tik skaitmeniu 2 arba skaitmeniu 3 ir vis tiek tikisi paversti ją teisinga skaitine lygybe.

Ar tai jam pavyks?

Jeigu tokia keturių dėmenų lygybė yra įmanoma, tai kam tada galėtų būti lygus pats pirmasis iš 4 tos lygybės dėmenų?

Jeigu sumos dėmenų perstata nelaikoma skirtingu sprendiniu, tai ar galėtų Suvalkijos berniokas rasti dar kitą skirtingą tokių keturių skaičių rinkinį?

Sprendimas

Aritmetiniai tyrimai rodo, kad yra tik du tokie iš esmės skirtingi (kurie nesutampa, perstatinėk tu juos, gerasis žmogau, kaip bepanorėjęs) skaičių ketvertai:

$$0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}23 + 0{,}32 = 1$$

ir

$$0{,}22 + 0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}33 = 1.$$

Todėl matome, kad pats pirmasis iš keturių tos lygybės dėmenų gali būti

0,22,
0,23,
0,32

arba net ir

0,33.

Atsakymas

Lygybė įmanoma.

Pirmasis sumos dėmuo gali būti lygus

0,22, 0,23, 0, 32 arba 0,33.

Yra du tinkantys (perstatinėjant nesutapatinami) skaičių rinkiniai:

{0,22, 0,23, 0,23, 0,32}

ir

{0,22, 0,22, 0,23, 0,33}.

3. *Marijampolės centro futbolo turnyre dalyvavo 6 komandos, kurių kiekviena sužaidė po vienas rungtynes su kiekviena kita iš likusių komandų. Žaidimo taisyklės Suvalkijos sostinėje buvo tokios: už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už sužaistas lygiosiomis – 1 tašką, o už pralaimėjimą komandai įskaitoma 0 taškų.*

Suvedus visus rezultatus paaiškėjo, kad „Šešupės pramuštgalvių“ komanda, kuri pradėjo treniruotis vos prieš 3 dienas, užėmė tame turnyre pačią paskutinę vietą, surinkusi mažiau taškų už bet kurią kitą tame turnyre žaidusią komandą.

Metiniame klubo valdybos posėdyje, anaiptol neslėpdamas to fakto, klubo prezidentas pagyrė komandą bent jau už tai, kad vos 3 dienas tesitreniravusi komanda sugebėjo surinkti daugiausiai taškų iš visų kada nors tokiame 6 komandų turnyre paskutinę užėmusių komandų, surinkusių mažiau taškų už bet kurią kitą komandą.

Kiek taškų surinko tame turnyre „Šešupės pramuštgalvių“ komanda, jeigu visa, ką pasakė klubo prezidentas – gryna teisybė?!

Sprendimas

Sprendimo vizija ir konkreti atsakymo daryba susideda iš trijų dalių.

1. Sukonstruojame galimai „turtingą taškais“ absoliučios pusiausvyros padėtį.

2. Ją lengvai „pagadiname“ taip, kad atsirastų komanda, surinkusi mažiau taškų už visas kitas to turnyro komandas.

3. Griežtai įrodome, kad tada paskutinės komandos surinktų taškų skaičius niekaip nebegali būti padidintas – todėl tada jis tikrai ir bus lygus „Šešupės pramuštgalvių“ (toliau trumpai: ŠP) klubo surinktam taškų skaičiui.

Pirmajam etapui reikėtų dviejų „turnyrinių lentelių“.

Pirmoji „ateinanti į galvą“ turnyrinė lentelė būtų tokia, kai visos komandos visas rungtynes sužaidžia lygiosiomis (ir visos jos už visas rungtynes gauna po 1 tašką):

	A	B	C	D	E	F	TAŠKAI	VIETA
A	X	1	1	1	1	1	5	1-6
B	1	X	1	1	1	1	5	1-6
C	1	1	X	1	1	1	5	1-6
D	1	1	1	X	1	1	5	1-6
E	1	1	1	1	X	1	5	1-6
F	1	1	1	1	1	X	5	1-6

Tai tikrai yra „absoliučios“ taškų lygybės būsena, tačiau surinktų taškų gausybės požiūriu yra kita, geresnė „absoliučios“ taškų pusiausvyros būsena, kai kiekviena komanda laimi dvejas rungtynes, vienas sužaidžia lygiosiomis ir dvejas pralaimi.

Tada visos komandos turėtų nebe po

5,

o jau po

7

taškus.

Tokia būsena, kaip rodo žemiau pateikiama galima tokio turnyro lentelė, yra įmanoma:

	A	B	C	D	E	F	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	3	1	0	0	7	1-6
B	0	X	3	3	1	0	7	1-6
C	0	0	X	3	3	1	7	1-6
D	1	0	0	X	3	3	7	1-6
E	3	1	0	0	X	3	7	1-6
F	3	3	1	0	0	X	7	1-6

Pirmoji dalis yra baigta.

Kita dalis būtų „lengvas padėties pagadinimas“.

Tai darysime taip:

Peržiūrime komandų

A

ir

D

tarpusavio rungtynių rezultatą.

Tos komandos sužaidė lygiosiomis. Tačiau paaiškėjo ne tik tai, kad komanda

D

tai ir yra tikrieji

Šešupės pramuštgalviai

arba

ŠP,

bet dar ir tai, kad rungtynėms buvo registruotas visiškai nesitreniravęs futbolininkas, kas pagal turnyro nuostatus yra kategoriškai draudžiama.

Todėl komandai

D,

arba kitaip

ŠP

buvo įskaitytas pralaimėjimas (o komandai A, suprantama, pergalė) ir turnyro lentelė pasidarė tokia:

	A	B	C	ŠP	E	F	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	3	3	0	0	9	1
B	0	X	3	3	1	0	7	2-5
C	0	0	X	3	3	1	7	2-5
ŠP	1	0	0	X	3	3	6	6
E	3	1	0	0	X	3	7	2-5
F	3	3	1	0	0	X	7	2-5

Antroji dalis baigta, turime turnyro lentelę, kur net

$$6$$

taškus surinkusi komanda teužėmė tik

6-tąją,

paskutinę vietą, surinkusi mažiau taškų už bet kurią kitą iš tame turnyre dalyvavusių komandų.

Beliko paskutinioji dalis – įrodinėjimai, kad surinkti daugiau taškų ir likti

“grynoje“

paskutinėje vietoje nebeįmanoma.

Tarkime, kad tai įmanoma.

Tada “Šesupės pramuštgalviai“ surinktų jau bent

$$7$$

taškus, o kitos likusios

ištisos penkios

komandos – bent po

$$8.$$

Tada jos visos šešios jau būtų surinkusios mažų mažiausiai

$$7 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$$

arba jau nė kiek ne mažiau kaip

$$47$$

taškus.

Tačiau tai jau apskritai nebeįmanoma, nes

$$6$$

komandų turnyre yra sužaidžiama

$$15$$

rungtynių, vadinasi, tegalima surinkti daugių daugiausiai

$$15 \cdot 3$$

arba „tik“

$$45$$

taškus.

Šis samprotavimas, arba gautasis prieštaravimas ir įrodo, kad surinkus

$$7$$

(ir daugiau taškų) „grynos“ paskutiniosios vietos užimti jau nebegalima.

Atsakymas.

Šešupės pramuštgalvių komanda surinko turnyre 6 taškus.

4. *Kasmet šventų Kalėdų naktį centrinėje Marijampolės aikštėje apsirasdavo paslaptingas stačiakampis. Reti drąsūs praeiviai galėdavo pastebėti, kaip jis įprastu būdu dviem tarpusavyje statmenomis ir to pradinio stačiakampio kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis būdavo padalijamas į 4 stačiakampiukus. Dar būdavo galima įžiūrėti, kad trijų iš tų 4 susidariusių stačiakampiukų plotai yra 2, 8 ir 16. Ketvirtojo stačiakampiuko ploto nesimatydavo, bet Marijampolės šviesuomenė jau buvo išmokusi jį susiskaičiuoti. Kam gali būti lygus to ketvirtojo stačiakampiuko plotas?*

Sprendimas

Pastebėkime, kad jeigu stačiakampis lygiagrečiomis jo kraštinėm tiesėmis yra padalytas į stačiakampiukus

A, B, C, D

A	B
C	D

tai tų stačiakampiukų plotų sieja dėsnis:

;**„Įstrižai” esančių stačiakampiukų plotų sandaugos yra lygios“.**

Pajutus, kad taip yra, tai įrodyti visai nebesunku: susižymėkime viduje stačiakampiukų matmenis

u, v, p ir q:

A u	q B v
C p	D

Tada sandauga

$$u \cdot v \cdot p \cdot q$$

vienaip grupuojant virsta

$$(u \cdot q) \cdot (v \cdot p),$$

o tai yra

$$A \cdot D,$$

o grupuojant sandaugą

$$u \cdot v \cdot p \cdot q$$

kitaip, arba

$$(u \cdot p) \cdot (v \cdot q),$$

ji “virsta” kitų dviejų „kryžmų“ plotų B ir C sandauga

$$C \cdot B.$$

Vadinasi, jos tikrai lygios.

Dabar tereikia pasižiūrėti kaip gali būti išsidėstę tie trys žinomo ploto stačiakampiukai ir kaip – pagal juos – tas ketvirtasis, kurio plotą pagal kiekvieną padėtį tuojau pat ir surandame.

Galimi trys iš esmės skirtingi atvejai

2	8
?	16

Tada turi būti

$$? \cdot 8 = 2 \cdot 16$$

ir

$$? = 4.$$

Kitas išsidėstymas gali būti toks:

?	8
2	16

Tada turi būti

$$? \cdot 16 = 2 \cdot 8$$

ir

$$? = 1.$$

Galiausiai padėtis gali būti dar ir tokia:

2	16
8	?

Tada, suprantama,

$$? \cdot 2 = 8 \cdot 16$$

ir

$$? = 64.$$

Daugiau jokių iš esmės naujų padėčių nėra, nes „pagal įstrižainę“ prieš nežinomą ketvirtąjį plotą jau „pabuvojo“ visi trys stačiakampiukai su plotais

8, 16 ir 2

atitinkamai.

Atsakymas.

Nežinomojo ketvirto stačiakampiuko plotas gali būti lygus

1, 4 arba 64.

5. *Marijampolėje šiuo metu visi tikslūs laikrodžiai rodo 14:00 – yra lygiai antra valanda dienos.*

Kokį kampą tada Marijampolėje sudaro įprastinių laikrodžių tolydžiai judančios valandų ir minučių rodyklės?

Kiek tiksliai laiko bus Marijampolėje tada, kai jos kitą kartą vėl sudarys tokį patį kampą?

Sprendimas

Aišku, kad lygiai antrą valandą dienos valandų ir minučių rodyklės sudaro (lygiai) 60º kampą.

Po antros valandos dienos kitas kartas, kai valandų ir minučių rodyklės vėl sudarys (lygiai) 60º kampą bus tada, kai minučių rodyklė bus pasisukusi 120º didesniu kampu negu valandų rodyklė.

Tarkime, kad tas laikas yra

$$x$$

minučių po antros valandos dienos.

Minučių rodyklė per 1 valandą pasisuka

$$360^{\circ}$$

kampu, arba

$$6^{\circ}$$

per vieną minutę.

Vadinasi, per x minučių ji pasisuks

$$6x^{\circ}$$

laipsnių.

Valandų rodyklė per 60 minučių pasisuka

$$30^{\circ}$$

kampu, arba

$$(1/2)^{\circ}$$

per vieną minutę.

Vadinasi, per x minučių ji pasisuks

$$(1/2)x^{\circ}$$

laipsnių.

Todėl

$$6x - (1/2)x = 120,$$

arba

$$\frac{11}{2}x = 120,$$

o tai yra

$$x = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}.$$

Atsakymas

Ieškomasis laikas yra

$$21\frac{9}{11}$$

minutės po antros valandos (dienos).

2011 metai

1. Berniokas iš Suvalkijos lygumų sako, kad jis per vieną švilptelėjimą gali suvokti, kuriuos skaitmenis derėtų išbraukti iš 12-ženklio skaičiaus

321 321 321 321,

kad liktų pats didžiausias įmanomas skaičius, kuris būtinai dalijasi iš 9.

Ar Jūs tikite, kad Berniokas susitvarkys su šia užduotimi?

Koks tada patį didžiausią tokį skaičių ras tas bešvilpaujantis Berniokas?

Sprendimas

Kadangi paminėtojo skaičiaus

321 321 321 321

skaitmenų suma yra

$$3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 24,$$

tai išbraukti tikrai reikia, nes suskaičiuotoji skaitmenų suma

24

nesidalija iš

9.

Artimiausioji iš 9 besidalijanti skaitmenų suma yra 18, todėl skaitmenų sumą reikia sumažinti

$$24 - 18 = 6$$

vienetais.

Kadangi mūsų skaitmenys yra

1, 2 ir 3,

tai mažiausiai skaitmenų prarasime išbraukti 2 trejetus.

Vadinasi, išbraukti reikia 2 trejetus.

Toliau, jeigu jau reikia išbraukti du trejetus, tai juos reikia išbraukti “kuo toliau nuo skaičiaus pradžios”, nes kuo tolimesnius trejetus išbrauksime, tuo likęs skaičius yra didesnis.

Todėl išbraukiame pačius paskutiniuosius du trejetus ir gauname patį didžiausią įmanomą skaičių

3 213 212 121.

Atsakymas.
3 213 212 121

2. Bešvilpaujantis Berniokas iš Suvalkijos lygumų mokslui pašvęstose tarpuose tarp savojo muzikavimo sykį sakė, kad jam nieko nereiškia per ateinančios 5-minutės muzikavimo pauzės minutes kaip mat surasti visus skaičius nuo

1, 2, 3, …. 498, 499, 500,

kurie dalijasi iš didžiausio įmanomo kiekio dešimties pirmųjų skaičių

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Sprendimas

Aišku, kad nėra tarp pirmųjų 500 skaičių tokio skaičiaus, kuris dalytųsi iš jų visų, nes jis tada turėtų būti nemažesnis kaip

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Tačiau jeigu mes atskirtume daliklį 7, tai gautume skaičių

360,

kuris dalijasi iš visų likusiųjų skaičių (išskyrus 7).

Parodysime, kad tarp tų pirmųjų 500 skaičių daugiau tokių skaičių, kurie dalytųsi iš 9 iš tų 10 pirmųjų skaičių nėra.

Tikrai, jeigu skaičius nesidalija iš 9, tai jis turi dalytis iš

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 = 840.$$

Jeigu jis nesidalija iš 8, tai jis privalo dalytis iš

$$5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 = 1260.$$

Jeigu skaičius nesidalija iš 5, tai jis privalo dalytis iš

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Kitų skaičių jau galima nebetikrinti, pavyzdžiui, dėl to, jog jeigu skaičius nesidalija iš 6, tai jis dar nesidalija ir dar iš vieno kurio iš skaičių 2 arba 3, arba jau iš dviejų iš tų pirmosios dešimties skaičių.

Atsakymas

Tarp pirmųjų penkių šimtų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 500 tėra vienintelis skaičius 360, kuris dalijasi iš devynių iš dešimties pirmosios dešimtinės skaičių

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ir 10.

3. Pailsęs nuo švilpavimo švelnus Berniokas iš Suvalkijos lygumų prisėdęs atsikvėpti užsnūdo ir sapne labai aiškiai ir nenuneigiamai išvydo tiesią kaip stygą autostradą iš Laikinosios Lietuvos sostinės į Amžinąją Suvalkijos sostinę. Toje autostradoje jis regėjo augantį vienintelį Beržą, lietuvišką beržą ir nuo jo iki Laikinosios Sostinės buvo dvigubai arčiau negu iki

Amžinosios. Berniokas toliau nenuginčijamai suprato, kad jis pastoviu greičiu (kuris, suprantama, buvo didesnis už 0) važiuoja iš Laikinosios Sostinės į Amžinąją. Vėliau jis dar labai aiškiai spėjo suvokti, kad lygiai 12 valandą jis bus du kartus arčiau Beržo, negu Laikinosios sostinės. Toliau tęsdamas savo įspūdingą kelionę jis 12.40 jis vėl bus dvigubai arčiau Beržo, negu Laikinosios Sostinės. Kada Berniokas iš Suvalkijos lygumų tomis lygumomis toliau važiuodamas galutinai atvažiuos į amžinąją Suvalkijos sostinę?

Sprendimas

Visą kelią nuo Laikinosios Lietuvos sostinės iki Amžinosios Suvalkijos Sostinės padalinkime į devynias lygias dalis, kurių kiekvienos ilgis yra

$$x.$$

Tada pagal sąlygą atstumas nuo Laikinosios Sostinės iki Amžinosios yra lygus

$$9x.$$

Kadangi nuo vienintelio Beržo iki Laikinosios Sostinės yra dvigubai arčiau kaip iki Amžinosios, todėl vienintelis Beržas auga

$$3x$$

atstumu nuo Laikinosios ir

$$6x$$

atstumu iki Amžinosios Suvalkijos Sostinės.

Kadangi kelionės metu švelnus Berniokas dukart buvo dukart arčiau Beržo negu Laikinosios Sostinės (pirmą kartą tai su juo nutiko 12.00 val., o antrą kartą – 12.40 val.), tai pirmą kartą (12.00 val.) tai buvo tada, kai jis buvo nuvažiavęs

$$2x$$

nuo Laikinosios Sostinės (ir tada jis tikrai buvo

$$3x - 2x = x,$$

arba dvigubai arčiau beržo, nes tas beržas juk auga už $3x$ nuo Laikinosios Sostinės).

Antras toks momentas (12.40 val.), kai jis vėl bus dukart arčiau beržo negu Laikinosios Sostinės nutiks, bus kai jis bus nuvažiavęs

$$6x$$

nuo Laikinosios Sostinės (ir tada iki Amžinosios Sostinės jam dar bus likę

$$9x - 6x = 3x).$$

Vadinasi, važiuodamas tuo pačiu nekintamu nenuliniu greičiu Berniokas

12.00 val.

yra nuvažiavęs

$$2x$$

km. nuo Laikinosios Sostinės, o

12.40 val.

jis bus nuvažiavęs

$$6x$$

(nuo Laikinosios Sostinės).

Taip jis per

$$40$$

minučių nukaks

$$6x - 2x = 4x$$

kilometrų, todėl

$$x$$

kilometrų jis nuvažiuoja per

$$10$$

minučių.

Kadangi

$$6x$$

kilometrų jis bus nuvažiavęs

$$12.\ 40$$

val, o iki Amžinosios Suvalkijos Sostinės tada jam dar yra likę

$$9x - 6x = 3x,$$

todėl tiems $3x$ Berniokas sugaiš dar

$$30$$

minučių ir į Amžinąją Suvalkijos Sostinę jis atvyks

$$13.10$$

val. ir bus ten deramai sutiktas.

Atsakymas

Į Amžinąją Suvalkijos Sostinę Berniokas atvyks (kartu su mumis) 13.10 val.

4. Bešvilpaujančio Suvalkijos bernioko sesuo vieną rytą pynėsi kasas, o kad galva tuo metu nestovėtų visai dyka be apčiuopiamos naudos, mergaitė, dar besišukuodama, įsigudrino susirasti penkis pagal didumą surikiuotus skaičius.

$$a < b < c < d < e$$

ir mintyse ėmėsi žaibiškai juos dėlioti poromis visais įmanomais būdais po du skirtingus skaičius.

Dar gerai neįpusėjusi to šukavimosi ji jau buvo suradusi tris pačias mažiausias sumas, kurios buvo 32, 36 ir 37, ir dvi pačias didžiausias sumas, kurios buvo 48 ir 51.

Ar težinant tik tiek, kiek dabar čia tėra pasakyta, jau galima garantuotai nustatyti, kam yra lygus pats didžiausias iš tų 5 jos susirastųjų skaičių, arba, kitaip sakant, kam yra lygus skaičius e?

Sprendimas.

Nesunku suvokti, jog dviejų pačių mažiausių skaičių

$$a \text{ ir } b$$

suma

$$a + b$$

yra pati mažiausia dviejų skirtingų skaičių porų suma ir, analogiškai, dviejų pačių didžiausiųjų skaičių d ir e suma

$$d + e$$

yra pati didžiausia dviejų skirtingų skaičių porų suma.

Toliau galima sakyti, kad antroji pagal mažumą suma visada yra skaičių

$$a \text{ ir } c$$

suma

$$a + c$$

ir, analogiškai, antroji pagal didumą suma visada yra skaičių

$$c \text{ ir } e$$

suma

$$c + e.$$

Kadangi pati mažiausioji suma yra 32, o antroji pagal mažumą suma yra 36, tai iš jų palyginimo matome, kad skaičius c yra

$$36 - 32 = 4$$

vienetais didesnis už d ir, analogiškai, skaičius d yra

$$51 - 48 = 3$$

vienetais didesnis už skaičių *c*.

Be to, skaičiams

$$a < b < c < d < e$$

yra visada teisinga toks rikiuotė

$$a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e$$

ir

$$b + c < b + d < c + d.$$

Vadinasi, trečioji pagal mažumą suma, kuri yra

$$36,$$

galėtų būti arba

$$a + d$$

arba

$$b + c.$$

Tačiau suma

$$a + d$$

negali būti

$$36,$$

nes ji tada už antrąją pagal didumą sumą

$$a + c$$

turėtų būti didesnė 3 vienetais – tiek, kiek *d* yra didesnė už *c*, – o kaip ką tik buvo pasakyta, ji tėra tik vienetu didesnė (nes viena yra 36, o kita – 37).

Todėl tada trečioji pagal mažumą suma tegali būti

$$b + c,$$

kuri yra lygi

$$37.$$

Tada turime lygybes

$$a + b = 32,$$
$$a + c = 36,$$
$$b + c = 37,$$
$$c + e = 48.$$

Sudėjus antrą lygybe su trečia gausime

$$a + c + b + c = 36 + 37 = 73,$$

o kadangi

$$a + b = 32,$$

tai

$$2c = 73 - 32 = 41,$$

ir

$$\mathbf{c = 20,5.}$$

Kadangi

$$c + e = 48,$$

tai

$$e = 48 - c = 48 - 20,5 = 27,5.$$

Atsakymas.

Didžiausias skaičius *e* = 27,5.

5. Marijampolės savivaldybė vakar patvirtino būsimojo Marijampolės Mokslo ir menų licėjaus herbą, kuriame yra *mykolaitiškasis* kvadratas *ABCD* ir *putiniškasis* pusskritulis su skersmeniu *AD* ir apie kuriuos yra apibrėžtas apskritimas taip, kaip parodyta piešinyje. Kam yra lygus to apibrėžtinio apskritimo spindulys, jeigu *mykolaitiškojo* kvadrato *ABCD* kraštinės ilgis yra lygus 1?

Sprendimas.

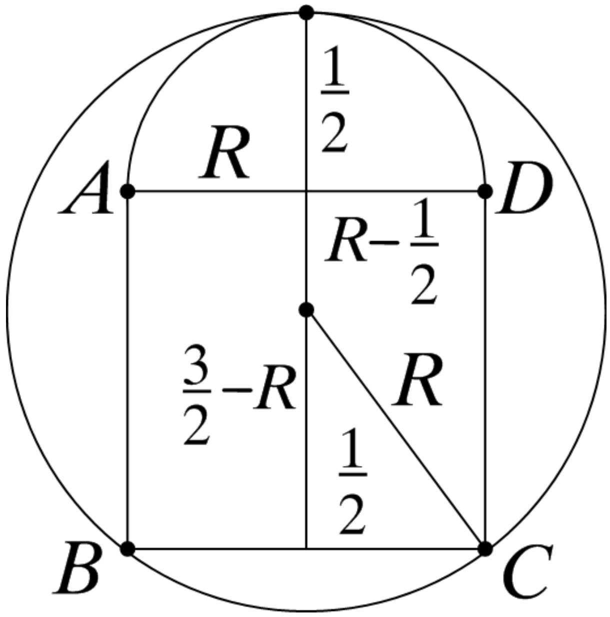
Pažymėkime ieškomąjį apibrėžtojo apskritimo spindulį R (žr. brėž.).

Kadangi putiniškojo pusskritulio skersmuo yra lygus mykolaitiškojo kvadrato kraštinės ilgiui, kuris yra 1, tai putiniškojo pusskritulio spindulys yra lygus

$$\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, žemiau mykolaitiškojo kvadrato kraštinės AD esančios spindulio dalies ilgis yra

$$\boldsymbol{R}-\frac{1}{2}.$$



Brėžinio apačioje matome statųjį trikampį, kurio trumpesnysis statinis yra tikrai lygus

$$\frac{1}{2},$$

nes tai yra lygiai pusė mykolaitiškojo kvadrato kraštinės ilgio. Kitas to stataus trikampio statinis yra

$$1-(\boldsymbol{R}-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}-R.$$

Taikydami tam stačiajam trikampiui su statiniais

$$\frac{3}{2}-R \text{ ir } \frac{1}{2}$$

bei įžambine

$$R$$

Pitagoro teoremą gausime

$$(\frac{3}{2}-R)^2+(\frac{1}{2})^2=R^2 \quad .$$

Pakėlę kvadratu turime

$$(\frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot R + R^2) + \frac{1}{4} = R^2 \ ,$$

o suprastinus

$$\frac{10}{4} - 3R = 0,$$

todėl

$$R = \frac{5}{6}.$$

.

Atsakymas
Marijampolės Meno ir mokslo licėjaus herbo apibrėžtinio apskritimo spindulys

$$R = \frac{5}{6}.$$

2012 metai

1.Kai sirpsta vyšnios Suvalkijoje, besidomintys mokslu jaunuoliai įpuola į aritmetinių paieškų šėlsmą, patį kilniausią iš visų intelektinio kilnumo ir skaitinės meistrystės proveržių. Tūkstančiai sėdinčių ir dešimtys tūkstančių sėsiančių mokytis staiga pajunta savyje nenutildomą galią gražiai dainuoti ar pabaigti bet kokio intensyvumo aritmijos kursus. Daug kas manosi galįs, net Suvalkijoje negimęs, rytais imti taisyklingai kirčiuoti ar iki galo išspręsti kokį nors (pad)oriai viliojantį loginį uždavinį.

Taip galynėdamasi su pasitaikančiais sunkumais ir gėrėdamasi gamtos ir išminties gražumais skleidėsi naujoji amžinosios Suvalkijos derlingųjų padangių šviesutė Kybartė Suvalkevičiūtė. Lemiamos reikšmės galutiniam jos išmaniosios meistrystės proveržiui turėjo vienas priešokiais kone valandą besitęsęs ir vykusiai pasibaigęs švelnus galynėjimasis su šiuo iš pažiūros visai paprastu, bet realiai susidūrus visas sprendybines galias sujudinančiu uždaviniu, kurio kukli ir vis tiek labai graži sąlyga pateikiama žemiau:

5-ženklis skaičius *xyxyx* dalijasi iš 3, o 7-ženklis skaičius *yxyxyxy* – jau net iš 18. Suraskite visus tuos tokius skaičius – visus „lig vienam“, jeigu joks skaičius negali prasidėti 0.

Sprendimas.

Skaičius *xyxyx* $(x \neq 0)$ dalijasi iš 3 tada ir tiktai tada, kai iš 3 dalijasi jo skaitmenų suma

$$x + y + x + y + x = 3x + 2y.$$

Tačiau

$$3x + 2y$$

dalijasi iš trijų tada ir tiktai tada, kai

$$2y$$

dalijasi iš 3, arba, ir tai yra tas pats, kai iš 3 dalijasi ir pats

$$y.$$

Todėl

$$y$$

tada tegali būti lygus

$$0, 3, 6 \text{ arba } 9.$$

Tačiau kadangi y yra dar ir 7-ženklio skaičiaus

$$yxyxyxy$$

pirmasis skaitmuo, todėl ir jis nelygus

$$0.$$

Kadangi to skaičiaus dalumas iš

$$18$$

reiškia tiek pat, kaip ir jo dalumas iš

2 ir 9

vienu metu, todėl dėl būtino dalumo iš 2 paskutinysis skaičiaus skaitmuo (kuris irgi yra y) turi būti lyginis.

Kadangi 0 jau atmestas, todėl iš likusių trijų minėtųjų skaičių

3, 6 ir 9

lyginis tėra vienintelis skaičius

6.

Todėl

$$y = 6.$$

Toliau, aišku, kad skaičius

$$6x6x6x6$$

turi dalintis ir iš

9.

Tačiau skaičius

$$6x6x6x6$$

dalijasi iš

9 išimtinai tiktai tada, kai iš 9

dalijasi skaičius

$$6 + x + 6 + x + 6 + x + 6 = 24 + 3x,$$

Arba tada, kai iš

9

dalijasi skaičius

$$6 + 3x.$$

Skaičius

$$6 + 3x$$

dalijasi iš 9 išimtinai tiktai tada, kai x yra

1, 4 arba 7

(nepamirškime, kad ir pats x yra skaitmuo).

Todėl visi tie skaičiai, kurių mes ieškojome kartu su Kybarte Suvalkevičiūte ir – sėkmingai suradome – yra tokie:

16161 su 6161616, 46464 su 6464646 bei 76767 su 6767676.

Atsakymas

Tokios skaičių poros yra trys ir jos yra išvardintos dviem eilutėmis aukščiau.

2. Nejaugi iš tikrųjų kokiam nors aritmetiškai teisingai beševilpaujančiam Kazlų Rūdos berniokui galėtų kaip nors pavykti į vieną eilutę suburti tokius 27 skaičius, kad švilpauk tu sau kaip nori, bet toje eilutėje visada bet kurių 13 iš eilės einančių skaičių suma yra teigiama, o jau visų 27 eilutės skaičių suma yra neigiama?

Sprendimas.

Nesunku įsitinkinti, kad 27 skaičių eilutė, kurioje abu kraštiniai skaičiai – 1-asis ir 27-asis bei vidurinysis 14-asis skaičiai yra visi trys po – 11, o absoliučiai visi likusieji skaičiai yra po 1, arba eilutė

– –11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, – 11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,– 11

tinka pavyzdžiu mūsų uždaviniui, nes bet kurių 13 iš eilės einančių skaičių rinkinyje visada yra lygiai vienas skaičius – 11ir dar dvylika 1, todėl visų tų skaičių suma visada lygi 1 ir todėl yra teigiama, o visų 27 skaičių suma yra neigiama kaip trijų – 11 ir 24 vienetų suma.

Atsakymas.

Beševilpaujančiam Kazlų Rūdos berniokui gali ir pavykti sudaryti 27 skaičių skaičių eilutę, kurioje bet kurių 13 iš eilės einančių skaičių suma yra visada teigiama, o visų 27 tų skaičių suma, atvirkščiai, yra neigiama.

3. Prieš Balbieriškio žinutę Vaivutę ir beprisišvilpausiantį Suvalkijos bernioką Vitą guli dvi kone paskutinio atodūsio grybų krūvelės. Vienoje iš jų paskutinio atodūsio grybų yra 2012, o kitoje – tik 13. Vaivutė su Vitu pakaitomis ima sau atodūsio grybus, kiekvieną kartą galėdami paimti kiek nori grybų, bet tik iš vienos kurios nors krūvelės. Imties praleisti negalima, pirmoji ima Balbieriškio žinutė Vaivutė, o laimėjusiu paskelbiamas tas, po kurio imties nebepaimtų grybų visai nebelieka. Ar gali kuris nors iš jų imti tuos paskutinio atodūsio grybus taip, kad jis visada laimėtų, kad ir ką bedarytų kitas grybėmys ir kaip jis tada galėtų juos imti?

Sprendimas. Sprendimo algoritmas yra labai paprastas – pirmuoju savo grybėmiu Vaivutė gali sulyginti abi grybų krūvas, paimdama iš pirmosios didesniosios krūvelės

$$2012 - 13 = 1999$$

daug žadančius grybus.

Tolesni jos veiksmai aprašomi paprastu principu: kiek Vitas bepaimtų iš vienos kurios krūvelės, tiek pat ji galės paimti iš kitos.

Tokiu būdu, jeigu paimti pajėgs Vitas, tai paimti pajėgs ir Vaivutė.

Kadangi grybų skaičius yra baigtinis ir po kiekvieno grybėmio jis mažėja, tai todėl būtent Vaivutė ir bus tas žmogus, kuri paims paskutinius daug žadančius grybus ir todėl laimės (jei tik nepradės jų kramsnoti).

Atsakymas.

Vaivutė gali imti taip, kad ji visada laimės, nesvarbu kaip beimtų berniokas Vitas..

4. Suvalkijos bernioko pusbrolis Vitas neišbrendamuose Kazlų Rūdos miškuose tyliai gražiai augina šoklias ekologines ožkeles, kurias sekmadieniais dar ir treniruoja, o vidurdieniais – jau pagal nuotaiką – joms net pašvilpauja. Ožkelės yra linksmutės, mekena sau į taktą, pašaras joms nerūpi. Kartą tas Suvalkijos berniokas, atvykęs pasižmonėti į tą gūdaus miško viduryje klestinčią fermą, tiksliai susiskaičiavo, kad iš viso tame parodomajame paslėptajame ūkyje, suskirstytos į aptvarus, bindzinėja lygiai 54 ožkelės. Vidurdienį pusbrolis Vitas, pradėdamas parodomąjį ožkelių rodeo, įtaigiai sušvilpė. Atliepdamos į švilpesį, kiekviena ožkelė tik drykt ir peršoko į gretimą aptvarą, kuri kur tinkama. Nudžiugęs dėl ožkelių šoklumo linksmasis šeimininkas vėl perskaičiavo jas aptvarais ir, palyginęs su ankstesniais įrašais, pasakė svečiui, kad kiekviename aptvare, oi kaip įdomu, bet ožkelių skaičius „pakito septyneriopai“. (Pastaba: „pakito septyneriopai“ jų taisyklingoje kalboje reiškia, kad „arba septynis kartus padidėjo, arba septynis kartus sumažėjo“.)

Čia pat nežinia iš kur išdygusi muzikalioji bešvilpaujančio bernioko sesė Sonata, pasiklausiusi tų žodžių ir skaičių, prapliupo nesulaikomai kvatoti. Paklausta, ko gi ji čia taip linksminasi, Sonata pastebėjo, kad jai tos ožkelės nelabai rūpi, bet jeigu jau visuose aptvaruose tikrai ganėsi iš viso 54 ožkos, tai po jokio švilpesio nieku gyvu negali nutikti taip, kiekviename atskirame aptvare ožkų skaičius pakistų, kaip ji čia ką tik girdėjo, lygiai septyneriopai. „Taip nebus ir taškas“,- tarė ji,-„nes taip būti negali“. Iš kur ji čia tokia gudri?

Tai ir jūs kiekvienas nuspręskite, ar teisi yra Sonata, ar neteisi, ta kvatojanti beprisišvilpausiančio bernioko muzikalioji sesė? Ir būtinai pagrįskite, kodėl jūs taip manote?

Sprendimas. Kiekvienam aptvarui sudėkime tą ožkų skaičių, kuris aptvare buvo iki vidurdienio, su tuo ožkų skaičiumi, kuris jame radosi po to. Akivaizdu, kad toji suma kiekviename aptvare dalijasi iš 8. Tikrai, jeigu tame aptvare ožkų skaičius septyneriopai sumažėjo, tai iki pusiaudienio jis buvo $7x$, po pusiaudienio jis pasidarė „tik“ x, arba iš viso „prieš ir po kartu“ yra $7x + x = 8x$. Atvirkščiai, jeigu aptvare ožkų skaičius didėjo, tai iki vidurdienio ten buvo y ožkų, po vidurdienio tas skaičius „paseptyneriopėjo“, taigi pasidarė $7y$, arba iš viso kartu su tuo, kas buvo iki vidurdienio, yra $7y + y = 8y$, arba tai yra ir vėl iš 8 besidalijantis skaičius. Kadangi taip yra kiekviename aptvare, tai taip bus ir visose Vito valdose. Bet pagal sąlygą visose piemens valdose yra 54 ožkos, tai du kartus suskaičiuotas ožkų skaičius yra $54 + 54 = 108$. Bet 108 iš 8 nesidalija, todėl taip, kaip čia kad „planuojama, projektuojama ir aprašinėjama“, būti negali – nors ir kaip žaviai ir patraukliai visai tai galėtų atrodyti.

Atsakymas.

Sonata tikrai teisi.

5. Iš trijų skirtingų smailiojo trikampio viršūnių bešvilpaujantis berniokas Vitas kartu su sesule Sonata bei pusbroliu Romu Kybartiškiu išvedė: Vitas – pusiaukampinę iš vienos, Sonata – aukštinę iš kitos, o Romas – pusiaukraštinę iš likusios trečios to trikampio viršūnės. Po to jie visi dar filosofiškai pasvarstė, ar gali bešvilpaujančio bernioko Vito ir jo artimiausio pusbrolio Romo Kybartiškio išvestosios pusiaukampinė su pusiaukraštine padalinti sesulės Sonatos aukštinę į tris lygias dalis?

Tai ar gali kada taip nutikti? Jeigu taip tikrai gali nutikti, tai pateikite mums tinkamą pavyzdį, o jeigu taip nutikti negali, tai prašome paaiškinti, kodėl?

Sprendimas

Sonata yra teisi.

Tai mes dabar ir įrodysime. Sakykime, kad visuose aptvaruose, kuriuose ožkų skaičius pasidarys 7 kartus didesnis, dabar, dar nesušvilpus, ganosi x ožkų, o tuose aptvaruose, kuriuose po sušvilpimo ožkų skaičius 7 kartus sumažės, dabar, dar nesušvilpus, ganosi y ožkų.

Tuose apvaruose, kur po švilpesio ožkų skaičius septyniariopai padidės,, po švilpesio pagal sąlygą, jau bus lygiai 7x ožkų, o tuose aptvaruose, kur po švilpesio, o-kų skaičius septyniariopai sumažės, po švilpesio bus y/7 ožkų.

Bet ir dabar dar, dar nesušvilpus, it tada, kai jau bus sušvilpta, bendras ožkus skaičius bus lygiai toks pats, arba lygus

Kadangi ir dabar, prieš švilpesį, ir vėliau, jau po švilpesio, ožkų skaičius bus toks pats ir lygus 54, todėl bus teisingos lygybės:

$$x + y = 54,$$

$$7x + \frac{y}{7} = 54.$$

Sulyginę turėtume

$$x + y = 7x + \frac{y}{7},$$

o padauginę iš 7 gautume

$$7x + 7y = 49x + y,$$

arba

$$6y = 42x,$$

iš kur išplaukia

$$y = 7x.$$

Įrašius kad ir į pirmąją lygtį gauname

$$x + 7x = 54$$

arba

$$8x = 54,$$

vadinasi,

$$x$$

nėra sveikasis skaičius ir ožkų skaičiaus reikšti negali.

Antrasis sprendimas,

Jame nieko nereikia žinoti, tik suprasti ir nepamiršti, kad skaičius

108 nesidalija iš 8.

Įsivaizduokime, kad šuolio metu iš kiekvienos ožkos pasidaro dvi – viena tada natūraliai „grįžta“ į tą aptvarą, iš kurio ji ką tik iššoko, o kita „atsiduria ten, kur ir norėjo įšokti“. Tada kiekviename aptvare esančių jau „padvigubėjusių“ ožkų skaičius dalinsis iš 8, nes jis yra lygus arba skaičiui

$$7m + m,$$

arba

$$n + 7n,$$

priklausomai nuo to, ar konkrečiame aptvare esančių ožkų skaičius septyneriopai mažėjo ar didėjo.

Todėl kiekviename aptvare esantis ožkų skaičius yra lygus

$$8n \text{ arba } 8m,$$

todėl jis visada dalijasi iš 8.

Vadinasi, iš 8 turi dalintis ir visas tas jau „padvigubėjęs“ ožkų skaičius, kuris yra

$$2 \cdot 54 = 108.$$

Tačiau, kaip jau buvo pasakyta,

108 iš 8

nesidalina ir todėl tas uždavinys sprendinių neturi ir Sonata vėl yra teisi.

Atsakymas.

Sonata yra teisi – kiekviename aptvare ožkelių skaičių septyneriopai pasikeisti negali.

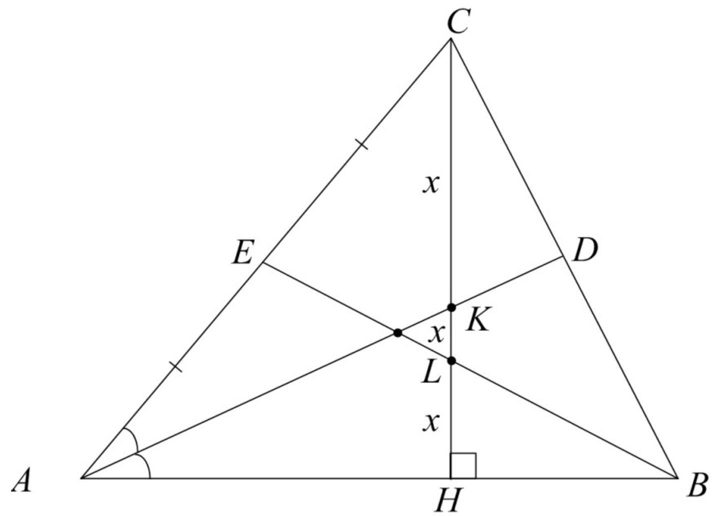
5. Iš trijų skirtingų smailiojo trikampio viršūnių bešvilpaujantis berniokas Vitas kartu su sesule Sonata bei pusbroliu Romu Kybartiškiu išvedė Vitas pusiaukampinę iš vienos, Sonata – aukštinę iš kitos, o Romas – pusiaukampinę iš trečios to trikampio viršūnės. Po to jie visi filosofiškai svarstė, ar gali beširpaujančio bernioko bernioko Vito ir pusbrolio Romo Kybartiškio išvestosios pusiaukampinė su pusiaukraštine padalinti sesulės Sonatos aukštinę į lygiai tris lygias dalis?

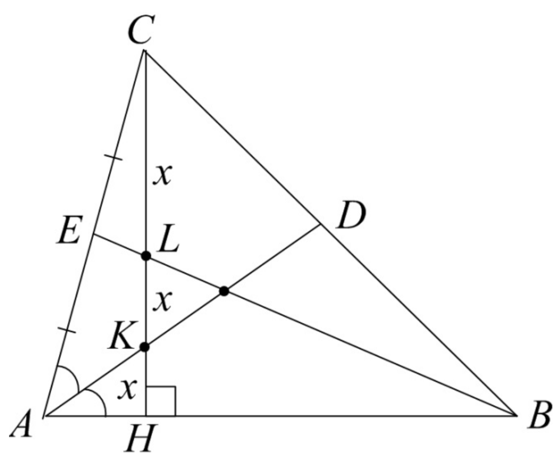
Sprendimas.

Įrodysime, kad šis jų sumanymas yra neįgyvendinamas.

Skirsime du atvejus.

Pirmasis atvejis, kai pusiaukampinė *AD*, išvesta iš viršūnės *A*, kerta aukštinę *CH* **aukščiau**,
negu iš viršūnės *B* išvestoji pusiaukraštinė *BE* (brėžinys iš karto žemiau) ir
antrasis atvejis, kai pusiaukampinė *AD*, išvesta iš viršūnės *A*, kerta aukštinę *CH* **žemiau**,
negu iš viršūnės *B* išvestoji pusiaukraštinė *BE* (brėžinys dar žemiau).





Pirmasis atvejis iš karto negalimas, nes *AK* tada yra stačiojo trikampio AHC smailiojo kampo A pusiaukampinė ir, būdama pusiaukampine, dalija tą kraštinę CH, į kurią ji yra išvesta, proporcingas šoninėms kraštinėms (AC ir AH) dalis.

Vadinasi,

$$\frac{KH}{KC} = \frac{2x}{x} = 2 = \frac{AH}{AC}.$$

Gautoji lygybė reikštų, kad stačiojo trikampio *AHC* statinis *AH* būtų dukart ilgesnis už įžambinę *AC*, o tai absoliučiai neįmanoma.

Antruoju atveju samprotausime „su plotais“. Pirmiausiai prisiminkime, kad bet kuri bet kurio trikampio pusiaukraštinė padalija to trikampio plotą į dvi lygias dalis. Lygiai taip pat yra tame dar žemiau esančiame trikampyje pusiaukraštinė *BE*, dalija trikampio *ABC* plotą į du lygiapločius trikampius *ABE* ir *BEC*.

Kita vertus, įrodysime, kad mūsų sqlygomis trikampio *ABE* plotas yra didesnis už trikampio *BEC* plotą – tai ir bus prieštaravimas, įrodantis, kad taip būti irgi negali.

Tam pakanka įrodyti, kad trikampį *ABE* sudarančių keturkampio *AHLE* ir trikampio *LHB* plotai yra atitinkamai didesni už trikampį *BEC* sudarančių trikampių *LEC* ir *CLB* plotus.

Trikampio *AHK* plotą pažymėkime *S*. Pastebėsime, kad trikampiai *AHK*, *AKL* ir *ALC* yra lygiapločiai, kaip turintys vienodo ilgio pagrindus *HK*, *KL* ir *LC* bei tą pačią viršūnę taške *A* ir iš jos išvestą bendrą visiems tiems trims trikampiams aukštinę *AH*. Dabar nesunku matyti, kad keturkampio *AHLE* plotas yra didesnis (2,5 karto) už trikampio *AHK* plotą *S*, o trikampio *ELC* plotas yra mažesnis už trikampio ALC plotą (jis lygus pusei to ploto), kuris yra toks pats kaip trikampio *AHK* plotas *S*.

Panašiai trikampio *BHL* plotas yra (2 kartus) didesnis už trikampio *BLC* plotą, nes ir tie trikampiai turi bendrą aukštinę *BH*, išvestą iš viršūnės *B*, o pirmojo trikampio pagrindas *HL* (kuris yra $2x$), yra ilgesnis už kito trikampio pagrindą *CL* (kuris yra x).

Atsakymas.

Smailajame trikampyje iš dviejų skirtingų viršūnių išvestos pusiaukraštinė ir pusiaukampinė negali iš trečiosios jo viršūnės išvestą aukštinę padalinti į tris lygias dalis.

2013 metai

1. Bešvilpaujantis Suvalkijos berniokas kartą kažkur pamatė tokią paprastą lentelę, kurios langeliuose buvo surašyti tik nuliai ir vienetai – po vieną skaičių kiekviename langelyje.
Geriau pasižiūrėjęs berniokas pamatė, kad ta lentelė ne visai paprasta, nes bet kuriame jos 2 x 2 kvadrate buvo po lygiai tris vienodus skaičius, o ketvirtas skaičius buvo kitoks.
(A) Pateikite ir Jūs mums tokią 5 x 5 lentelę, kurios langeliuose įrašyti tik nuliai ir vienetai, po vieną skaičių kiekviename langelyje, ir kurios bet kuriame 2 x 2 kvadrate yra lygiai trys vienodi skaičiai, o ketvirtas skaičius yra visada skirtingas.
(B) Toliau prašome mums pateikti tokią 5 x 5 lentelę su pačia didžiausia įmanoma tokios lentelės visų 25 nulių ir vienetų suma. Ir paaiškinkite mums, kodėl ta suma yra pati didžiausia.

Sprendimas

Iš karto matome dvi tinkamas lenteles.
Viena iš jų yra su keturiais vienetais, o kita – galima sakyti – duali jai su keturiais nuliais.
Viena yra
0 0 0 0 0
0 1 0 1 0
0 0 0 0 0
0 1 0 1 0
0 0 0 0 0
O kita būtų duali jai, nes pakanka 0 ir 1 „sukeisti vietomis".
1 1 1 1 1
1 0 1 0 1
1 1 1 1 1
1 0 1 0 1
1 1 1 1 1
Ši lentelė, aišku, „pretenduos" būti lentele su pačia didžiausia galima skaičių suma. Kadangi joje yra tik keturi 0, o kiti elementai yra 1, tai šios lentelės skaičių suma yra 21.
Lieka įrodyti, kad didesnė ji negali būti.
Jeigu ji galėtų būti didesnė, tai joje tebūtų daugiausiai tik trys nuliai. Bet jei joje tebūtų tik daugiausiai trys nuliai, tai tada bet kurį jos 4 x 4 kvadratą padalijus į keturis nesikertančius 2 x 2 kvadratus, kiekviename iš tų keturių kvadratų turėtų būti bent po vieną nulį, o tai prieštarauja tam, kad visų tokios lentelės skaičių suma galėtų būti didesnė kaip 21.

Atsakymas. Pati didžiausia lentelės skaičių suma gali būti 21.

2. Vieną kartą Suvalkijos berniokas pavargęs nuo darbų ir dainų užmigo ir sapne regėjo du triženklius skaičius. Nors tie skaičiai buvo labai panašūs, tačiau berniokas puikiai įsiminė, kad jie tesiskyrė tik vieninteliu skaitmeniu kažkurioje vienoje pozicijoje, jis jau nebeatsiminė kurioje – šimtų, dešimčių ar vienetų, o likusiose dviejose pozicijose kiti skaitmenys buvo tokie patys. Negana to, balsas už kadro įtaigiai pasakė ir dar pakartojo, kad vienas iš tų poros skaičių yra kito poros skaičiaus kartotinis.
Rytą prabudęs Suvalkijos berniokas suprato, kad derėtų išsiaiškinti keletą dalykų:
(A) Ar jo sapnas buvo teisingas ir ar tikrai galima rasti tokius du triženklius skaičius (m, n), tesiskiriančius tik vienoje kurioje nors iš trijų pozicijų, o kitose dviejose pozicijose turinčių tuos pačius skaitmenis ir dar, žinoma, tokius, kad vienas iš jų būtų kito kartotinis?
(B) Gal jums pakaktų kantrybės surasti jau penkias tokias poras (m, n).
(C) Gal paaiškintumėte mums, ar tokių porų (m, n) yra daugiau kaip dešimt.
(D) Suraskite, kiek tokių porų (m, n) yra iš viso.

Pastaba. Skaičiuodami galimas tokias poras laikykime, kad antrasis poros skaičius n yra nemažesnis už pirmąjį poros skaičių m.

Sprendimas

Iš to, kad skaičiai akivaizdžiai negali sutapti ir iš to, kad antrasis skaičius yra pirmojo skaičiaus kartotinis, išplaukia, kad $n \geq 2m$. Kadangi m yra sveikasis skaičius, kuris yra didesnis arba lygus 100, mes gauname, kad $n - m \geq m \geq 100$ ir todėl m ir n tegali skirtis tik šimtų skiltyje (pirmajame triženklio skaičiaus skaitmenyje iš kairės).

Tai reiškia, jog egzistuoja toks natūralusis skaičius k ($1 \leq k \leq 8$), kad

$$n - m = 100k.$$

Kadangi m dalija n, tai mes matome, kad m dalija $n - m = 100k$.

Iš to, kad $2m \leq n \leq 999$, išplaukia jog $m \leq 499$. Iš to išplaukia, kad m turi būti vienas kuris iš žemiau pateiktųjų skaičių:

100, 120, 125, 140, 150, 160, 175, 200, 250, 300, 350, 400.

Tinkamos n reikšmės, atitinkančios šias atskiras m reikšmes gali būti parinktos atitinkamai

8, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 0, 1

būdais.

Todėl matome, kad parinkti tokią tinkamą porą (m, n) yra iš viso 22 būdai.

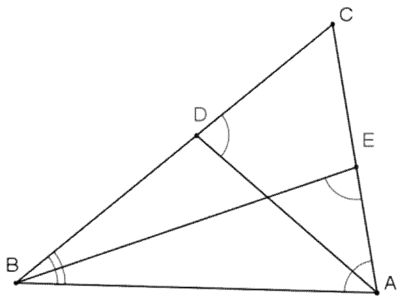
Atsakymas

22 poros

3. Suvalkijos berniokas labai atsargiai spręsdavo geometrinius uždavinius. Ir ne kiekvieną geometrinį uždavinį jis galėdavo greitai išspręsti, bet uždavinius su kampais mėgo – gal todėl, kad jam sekėsi juos spręsti. Kartą jo sesė geltonkasė ir parnešė jam tokį uždavinį su kampais ir liūdnokai šyptelėjusi paprašė bernioko padėti surasti tinkamą sprendimą. Perskaitęs sąlygą berniokas iš karto prisėdo prie brėžinio – jis puikiai žinojo, kad brėžinys geometriniame uždavinyje yra aukso vertės. Pati uždavinio sąlyga buvo trumputė ir skambėjo taip:
Trikampyje ABC išvedus kampų A ir B pusiaukampines AD ir BE paaiškėjo, kad net trijų kampų ADC, AEB ir BAC didumai yra tokie patys. Kam lygūs trikampio ABC kampai?

Sprendimas.

Pagal sąlygą kampai ADC, AEB ir BAC yra lygūs α.



Kadangi pagal sąlygą AD yra trikampio ΔABC pusiaukampinė, tai $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha.$ Iš trikampio ABD randame, kad $\angle ABD = 180° - \angle BDA - \angle DAB = 180° - (180° - \alpha) - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha.$

Todėl $\angle ABE = \frac{1}{4}\alpha,$ kadangi pagal sąlygą BE dalija kampą ABC pusiau.

Sudėdami visus tris trikampio ABE kampus gauname, kad

$$\frac{1}{4}\alpha + \alpha + \alpha = 180°, \text{ iš kur seka, kad } \alpha = 80°.$$

Tokiu būdu

$$\angle BAC = 80°, \angle ABC = \frac{1}{2}\alpha = 40°, \angle ACB = 60°.$$

Atsakymas

$40°, 60°, 80°.$

4. 2013 metams sėkmingai besibaigiant Suvalkijos bernioko mėlynakė sesė Laura pamėgo skaitinius žaidimus, kuriuose dažniausiai reikėdavo kažkokiu nurodytu būdu stengtis pasiekti išsvajotą metų skaičių 2013.

Vieno dviejų žaidėjų žaidžiamo žaidimo sąlyga buvo tokia:

Pirmiausiai lentoje yra parašomas skaičius 2.

Tada bešvilpaujantis berniokas ir sesė geltonkasė Laura pakaitomis ima prie lentoje esamo skaičiaus pridėjinėti natūraliuosius skaičius. Kiekvienu dėjimu prie jau esamo skaičiaus yra reikalaujama pridėti bent 1, bet, antra vertus, prie jau esančio lentoje skaičiaus reikia pridėti mažesnį skaičių už tą, kuris tuo metu yra parašytas lentoje. Užrašant naują skaičių, ankstesnis nutrinamas. Pirmąjį ėjimą Lauros siūlymu visada daro bešvilpaujantis berniokas.

Laimi tas žaidėjas, kuris pirmasis lentoje parašo metų skaičių 2013.

Ar gali kuris nors iš jų visada pirmasis pasiekti 2013, kad ir ką bedarytų kitas žaidėjas?

Sprendimas

Kadangi Lauros siūlymu pirmasis eina bešvilpaujantis berniokas, o lentoje yra užrašyti 2, tai pirmasis jo ėjimas yra aiškus iš anksto; jis tegali pridėti 1 ir parašys lentoje 3.

Toliau, kad ir ką Laura bedarytų, berniokas gali pasiekti, kad po sekančio jo ėjimo lentoje būtų 7. Tolesniais savo ėjimais jis gali pasiekti, kad lentoje atsirastų skaičiai 15, 31, 62, 125, 251, 503, 1006 ir, galiausiai, išsvajotieji 2013 ir todėl jis visada gali laimėti, kad ir ką bedarytų Laura.

Atsakymas

Jeigu Lauros pasiūlymu pirmąjį ėjimą daro bešvilpaujantis berniokas, tai jis gali laimėti, kad ir ką bedarytų Laura.

5. Suvalkijos bernioko mėlynakę sesę Laurą ir jos kaimynę Astą kurį laiką šiek tiek gąsdino toks klausimas su trupmenomis: sakykime, kad $\frac{x}{x^2+x+1}=a$, tai kam lygu $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$?

Sprendimas.
Sakykime, kad $a \neq 0$, tada $x \neq 0$ ir todėl yra teisingos lygybės

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$$

ir

$$\frac{1}{a}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1.$$

Todėl

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1}=\frac{a^2}{1-2a}.$$

Ši lygybė, kaip tai lengva patikrinti, yra teisinga ir tada, kai $a = 0$.

Atsakymas

$$\frac{a^2}{1-2a}.$$

2014 metai

1. Ankstyvoji Dovyduko Marijampoliškio kūdikystė baigėsi tada, kai iš jo tėvų namų į Vilnių vadovauti Debesų kompiuterijos trestui išsikraustė dėdė Stasys. Ir ne vien tik dėl to, kad po to labai nuseko Dovyduko saldainių jūra tortų krantais apdėta. Kaip linkusiam prie rašto labiausiai berniukui įstrigo supakuotos išvežti dėdės Stasio dėžės su knygomis. Tų dėžių buvo didžiulė virtinė, o visos jos kartu svėrė net 10 tonų. Dovydukas gerai nugirdo, kad jokios dėžės svoris neviršija 1 tonos. Kiek mažiausiai sunkvežimių, galinčių vežti ne daugiau kaip 3 tonas krovinio kiekvienas, reikėtų užsakyti, kad jais, tų dėžių atskirai jau nebesvėrinėjant, į Vilnių būtų garantuotai galima išvežti visas dėdės Stasio dėžes su knygomis?

Sprendimas.
Pirmiausiai pastebėkime, kad 4 sunkvežimių gali ir nepakakti. Taip galėtų nutikti, pavyzdžiui, tada jei pervežtinas krovinys susidėtų iš 13 dėžių, sveriančių po $\frac{10}{13}$ tonos kiekviena.
Tikrai, jeigu tartume, kad ir tada pakaktų 4 sunkvežimių, tai turint 13 dėžių į kažkurį sunkvežimį tikrai prisieitų krauti ne mažiau negu 4 dėžes, o tai jau būtų ne mažiau kaip 4 kartus po $\frac{10}{13}$ tonos, arba iš viso ne mažiau kaip $\frac{40}{13}>3$ (tonas) svorio, o šitiek svorio pagal sąlygą sunkvežimis „nebepatrauks“.
Telieka paaiškinti, kad 5 sunkvežimių būtų garantuotai gana, o tam pakanka nurodyti įtikinamą krovimo būdą, kuris galėtų būtų „nupasakotas“ taip: į kiekvieną sunkvežimį krauname dėžes iš eilės, kol tai įmanoma (visai nesvarbu, kokia dėžių tvarka ar sunkvežimių eile).
Kadangi jokios dėžės svoris neprašoka 1 tonos, tai į bet kurį 3 tonas pavežantį sunkvežimį taip kraudami knygų dėžes tikrai galėsime sukrauti ne mažiau kaip 2 tonas knygų (prisiminkime, kad

jokia dėžė daugiau 1 tonos nesveria) ir todėl į 5 sunkvežimius tikrai sukrausime visas 10 tonų krovinio, arba visas dėdės Stasio knygas.

Atsakymas

Garantuotam dėdės Stasio knygų į Vilnių išvežimui gali prireikti 5 sunkvežimių.

2. Į kiekvieną Dovyduko Marijampoliškio gimtojo Naujojo Virbalio miestelio namą vieną gražų gruodžio rytą laiškininkas atnešė arba 1, arba 2, arba 3, arba 4 Šv. Kalėdų sveikinimus. Dovydukas su savo draugais atliko statistinius tyrimus ir tiksliai suskaičiavo, kad namų, į kuriuos laiškininkas atnešė net 4 sveikinimus, buvo lygiai septynis kartus daugiau, negu namų, į kuriuos tebuvo atneštas vienintelis sveikinimas, o namų su 2 Šv. Kalėdų sveikinimais buvo lygiai penkis kartus daugiau negu namų su vieninteliu sveikinimu. Raskite, kiek vidutiniškai Šv. Kalėdų sveikinimų tą lemtingą gruodžio rytą buvo atnešta į kiekvieną gimtojo Dovyduko miestelio Naujojo Virbalio namą.

Sprendimas

Jeigu namų skaičių, į kuriuos atkeliavo vienintelis sveikinimas, pažymėtume N, tai namų, į kuriuos buvo atnešti net 4 sveikinimai, yra $7N$, o namų, į kuriuos buvo atnešti 2 sveikinimai, yra $5N$.

Pastebėkime, kad nieko nežinome apie namus su 3 sveikinimais, kurių yra, sakykime, M arba, kitaip sakant, nieko nėra pasakyta apie skaičiaus M „santykius“ su kitokį sveikinimų skaičių gavusiais namais ir tai pradžioje kelia tam tikrų „atsargokų“ minčių.

Pirmiau sudarome lentelę tarsi namų su 3 sveikinimais Naujajame Virbalyje apskritai nebūtų buvę. Suprantama, kad toji lentelė atrodys taip:

1	2	3	4
N	$5N$	0	$7N$

Taigi jeigu tartume, kad namų, gavusių 3 sveikinimus, iš Naujajame Virbalyje iš viso nebūtų buvę, tai tada į kiekvieną Naujojo Virbalio namą vidutiniškai būtų atkeliavę

$$\frac{1 \cdot N + 2 \cdot 5N + 0 \cdot M + 4 \cdot 7N}{N + 5N + 0 + 7N} = \frac{39N}{13N} = 3$$

sveikinimai ir toliau jau viskas iš karto „ima stotis į savas vietas“.

Pasidaro aišku, kad yra visai nesvarbu, kiek namų gavo lygiai po 3 sveikinimus, nes kadangi „kitokių namų“ gautųjų sveikinimų vidurkis, kaip jau paaiškėjo, yra 3, tai faktas, kiek namų gavo po 3 sveikinimus, darosi nebesvarbus, arba jau tik „statistikai bereikalingas“, nes juk tada ir visų Naujojo Virbalio namų sveikinimų vidurkis jau „per amžius“ yra ir bus lygus 3.

Tikrai, lentelės

1	2	3	4
N	$5N$	M	$7N$

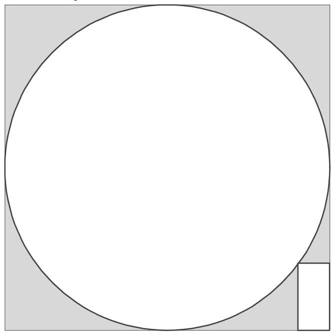
vidurkis, nepriklausomai nuo to koks bebūtų M, yra

$$\frac{1 \cdot N + 2 \cdot 5N + 3 \cdot M + 4 \cdot 7N}{N + 5N + M + 7N} = \frac{39N + 3M}{13N + M} \equiv \frac{3(13N + M)}{13N + M} = 3\,.$$

Atsakymas

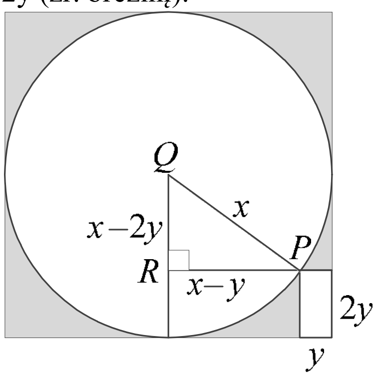
Į kiekvieną gimtojo Dovyduko miestelio Naujojo Virbalio namą tą lemtingą gruodžio rytą buvo atnešti vidutiniškai 3 Šv. Kalėdų sveikinimai.

3. Dovydukas, kartą vartydamas savo senelio Motiejaus Marijampoliškio gimnazijos parengiamojo skyriaus geometrijos sąsiuvinius, rado vieną sąlygą, prie kurios jo garbusis senelis buvo padėjęs šauktuką ir dar prirašęs trumpą komentarą „Žavu“. Dovydukas užsidegė noru išspręsti tą uždavinį, kuriame matėsi į kvadratą įbrėžtas apskritimas ir dar stačiakampis, kuris buvo kvadrato viduje, bet apskritimo išorėje. Dvi to stačiakampio kraštinės „ėjo“ kvadrato kraštinėmis, o viena stačiakampio viršūnė priklausė įbrėžtam apskritimui (kaip parodyta brėžinyje). Buvo dar pasakyta, kad to stačiakampio aukštis yra dvigubai didesnis už jo plotį. Koks yra kvadrato ir stačiakampio plotų santykis?



Sprendimas

Pažymėkime apskritimo spindulį raide x, tada kvadrato kraštinės ilgis, yra, suprantama, lygus $2x$. Toliau, tegu y išreiškia įbrėžto stačiakampio plotį, tada pagal sąlygą to stačiakampio aukštis yra 2y (žr. brėžinį).



Taikydami Pitagoro teoremą stačiajame trikampyje PQR turėsime lygybę

$$x^2 = (x-2y)^2 + (x-y)^2.$$

Ją pertvarkę gausime sąlygą

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 0,$$

kurią skaidydami dauginamaisiais turime išraišką

$$(x-y)(x-5y) = 0.$$

Iš čia be jokių abejonių gauname, kad arba

$$x = y\text{, arba } x = 5y.$$

Pirmoji lygybė mūsų uždavinio sąlygomis yra neįmanoma, nes tada sąlyga $x = y$ reikštų, jog „nėra apskritimo“.

O kai $x = 5y$, tai tada kvadrato kraštinė yra lygi $10y$, stačiakampio plotas $y \cdot 2y = 2y^2$ ir jų plotų santykis yra $(10y)^2 : 2y^2 = 100y^2 : 2y^2 = 50 : 1$.

Atsakymas

Kvadrato ir stačiakampio plotų santykis yra 50 : 1.

4. Šakiuose ėmė kartą ir susidraugavo du natūralieji skaičiai m ir n. Kartą, bekeliaudami į Vilkaviškį, jie pravažiavo pievą, kurioje vaikštinėjo trys lygtys, viena vardu $9x + 4y = 135$, kitos vardas buvo $4x + 9y = 135$, o trečia buvo vardu $11x + 6y = 240$. Bet juodu net galvos į tą pusę nepasuko. Bešvilpaujančio Suvalkijos bernioko sesė geltonkasė mums ir sako: „Be reikalo jiedu net galvos į tas įspūdingas lygybes nepasuko. Juk jeigu jose vietoje x imtume ir įrašytume tą keliu pravažiavusį m, o vietoje y imtume jo „mirtiną“ draugą n, tai paaiškėtų ne tik tai, kad kažkurios dvi iš tų lygčių virsta teisingomis lygybėmis, bet ir kad ta likusi lygtis teisinga

lygybe niekaip nevirsta“. O sumanusis Dovydukas Marijampoliškis dar pridūrė, kad paaiškėtų ne tik tai, kad kažkurios dvi lygybės yra tenkinamos, o likusioji netenkinama, bet paaiškėtų ir pati didžiausioji paslaptis: kokio tiksliai didumo yra tie du „draugeliai“ m ir n, kurie ką tik „pradardėjo“ pro šalį, leisdami sau į nieką nekreipti dėmesio.
Taigi kokie yra tokie du natūralieji skaičiai m ir n, kurie tenkina kažkurias dvi iš lygybių $9m + 4n = 135$, $4m + 9n = 135$, $11m + 6n = 240$, o likusiosios – niekaip ne?

Sprendimas

Pirmiausiai pastebėkime, kad sudėję pirmąją ir antrąją lygtis gauname

$$13m + 13n = 270,$$

arba

$$13(m + n) = 270.$$

Tačiau tada $m + n$ negali būti sveikasis skaičius, nes 270 nesidalija be liekanos iš 13, o tada juo labiau natūraliaisiais skaičiais negali būti ir patys m su n.
Vadinasi, kadangi sudėję pirmąją ir antrąją lygtis, gauname prieštaringą išvadą, arba, paprastai kalbant, kažką „be ryšio“, todėl galima sakyti, jog viena kuri iš jų ir yra ta likusioji lygtis, apie kurią sąlygoje pasakyta, jog ji „netenkinama“.
Toliau pastebėkime, jog atėmę pirmąją lygtį iš trečiosios gautume lygybę

$$2m + 2n = 2(m + n) = 105,$$

kurios vėl jokie nei sveikieji, nei juo labiau natūralieji skaičiai patenkinti negali, nes jei galėtų, tai tada kairėje pusėje būtų lyginis, o dešinėje – jau nelyginis skaičius.
Taigi vėl viena kuri iš jau kitų dviejų – dabar pirmoji arba trečioji – yra iš tų lygybių, apie kurią sąlyga kalba kaip apie „likusiąją“ lygtį, arba tokią, kuri negali būti „patenkinta“.
Kadangi „netenkinama“ arba toji „likusioji“ lygtis pagal uždavinio sąlygas yra viena vienintelė, tai tada ja privalo būti pati pirmoji lygtis, nes tik ji minima abiem atvejais.
Tada likusios 2 lygtys – arba antroji su trečiąja – abi yra „geros“ ir išsprendę jas kartu be jokio vargo randame, kad

$$m = 18,\ \text{o}\ n = 7.$$

Atsakymas

$(m; n) = (18; 7)$

5. Kartą Dovydukas Marijampoliškis, būdamas gerokai išsiblaškęs, gana ilgai vargo su tokiu uždaviniu, kuriame buvo pasakyta, kad skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1,$$

ir buvo klausiama, ar būtų galima tik tiek težinant surasti, kam yra lygi suma

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}.$$

Sprendimas

Minėtąją sumą surasti galima.
Pastebėkime, kad

$$\frac{a-c}{b+c}+1=\frac{a-c}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}=\frac{a+b}{b+c}.$$

Panašiai $\frac{b-a}{c+a}+1=\frac{b-a}{c+a}+\frac{c+a}{c+a}=\frac{b+c}{c+a}$ ir $\frac{c-b}{a+b}+1=\frac{c-b}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}=\frac{c+a}{a+b}$.
Sudėjus visas tris išraiškas gautume

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}+3=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=1+3=4.$$

Atsakymas

Galima. $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=4.$