Jaunesniųjų moksleivių grupė

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2001} = 2001, \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2001}^3 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2001}^4. \end{cases}$$

2. Duota $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}$, $n > 1$. Raskite $a_1 + \ldots + a_{2001}$.

3. Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi, nuvažiavus n_1 km, o užpakalinės – nuvažiavus n_2 km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

4. Įrodykite, kad iš plytos negalima išpjauti mažesnės plytos, kurios tūris ir pilnasis paviršius būtų atitinkamai lygūs pusei duotosios plytos tūrio ir pilnojo paviršiaus.

5. Mieste yra *n* pastatų, kurių amžių suma lygi *T*. Kada miestas bus jaunesnis: ar nugriovus seną pastatą, ar pastačius naują?

6. Nelyginiai natūralieji skaičiai jungiami į grupes. Pirmoje grupėje vienas skaičius (1), antroje du (3+5), trečioje trys (7+9+11) ir t.t. Įrodykite, kad *n*-osios grupės skaičių suma lygi n^3.

7. Įrodykite, kad įbrėžtas į apskritimą keturkampis yra lygiašonė trapecija, kai jo įstrižainės yra lygios.

8. Tegu *x* ir *y* – stačiojo trikampio statinių, o *z* – įstrižainės ilgiai. Kas daugiau: a) $x^3 + y^3$ ar z^3? b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ar $\frac{1}{z}$?

9. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais *n* galioja nelygybė

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geq 1.$$

10. Išspręskite lygtį

$$|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 2x| = 0.$$

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

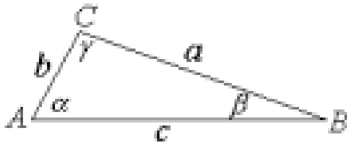
Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Sveikųjų skaičių aibės Z poaibio A elementai turi savybę: jei $x, y \in A$, tai $x - y \in A$. Žinoma, kad $2001 \in A$ ir intervale [–100, 100] yra nemažiau 10 ir nedaugiau 67 aibės A elementų. Kiek aibės A elementų yra intervale [–2001; 2001]?

2. Duota skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Žinoma, kad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$, $n \in$ N. Su kokiomis a_1 reikšmėmis a_{2001} yra sveikasis skaičius?

3. Raskite skaičiaus $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ ($n \in$ N, n nelyginis) paskutinį skaitmenį.

4. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle BAC = 3\angle ABC$.
Įrodykite, kad $(a+b)(a-b)^2 = bc^2$.



5. Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi nuvažiavus n_1 km, o užpakalinės – nuvažiavus n_2 km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

6. 100 apskritimo taškų pažymimi skaičiais 1, 2, … , 100 (nebūtinai eilės tvarka). Skaičiuojamos visos gretimų skaičių trejetų sumos. Įrodykite, kad egzistuoja du trejetai, kurių sumų skirtumas didesnis už du.

7. Išspręskite lygtį $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

8. Įrodykite, kad

$$\underbrace{2\,2\ldots2}_{n\text{ kartų}} + (\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ kartų}})^2 = \underbrace{1\,1\ldots1}_{2n\text{ kartų}}.$$

9. Urnoje yra M baltų ir N juodų rutulių. Atsitiktinai ištraukiami vienas po kito du rutuliai, grąžinant juos į urną. Raskite tikimybę, kad abu ištraukti rutuliai yra tos pačios spalvos ir įrodykite, kad ji yra nemažesnė už 1/2.

10. Raskite taškų su sveikomis koordinatėmis, esančių tarp parabolės $y = x^2$ ir tiesės $y = n^2$ (n – fiksuotas natūralusis skaičius), skaičių, patikrinus, kad $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.