PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS KETVIRTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

(Jaunesniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2002 m. lapkričio mėn. 29 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Pavaizduokite plokštumoje geometrinę vietą taškų (x; y), tenkinančių nelygybę

$$\min(x,\ y) \geq 1\text{; čia } \min(x,\ y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \leq y, \\ y, & \text{jei } y < x. \end{cases}$$

2. Iš lygybės $3^2 + 4^2 = 5^2$ išplaukia, kad 5×5 kvadratą galima supjaustyti į baigtinį skaičių dalių, iš kurių galima sudaryti 4×4 ir 3×3 kvadratus. Raskite minimalų tokių dalių skaičių.

3. Irkluodamas statmenai upės srovei, sportininkas nuplaukė į kitą krantą per 10 min. Po to jis 50 min. irklavo išilgai kranto prieš srovę, vėl perplaukė upę (irkluodamas statmenai upės srovei) ir 20 min. irkluodamas išilgai kranto grįžo į pradinę vietą. Koks irkluotojo greičio ramiame vandenyje ir upės greičio santykis?

4. Tegu skaičius $a + \dfrac{1}{a}$ yra natūralusis. Įrodykite, kad $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ yra taip pat natūralusis.

5. Jonas ir Agnė kalbasi:
Agnė: *Kokio amžiaus tavo vaikai?*
Jonas: *Visų trijų vaikų metų sandauga lygi 36.*
Agnė: *Man dar ne viskas aišku.*
Jonas: *Jų amžių suma tokia pat kaip tavo namo numeris.*
Agnė: *Vis tiek dar trūksta informacijos.*
Jonas: *Turinčio daugiausiai metų plaukai rudi.*
Agnė: *O! Dabar jau žinau.*
Nustatykite, kiek metų turi Jono vaikai.

6. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais k ir m, skaičius $k^2 + m^2$ dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai k ir m dalijasi iš 7.

7. Įrodykite, kad $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$.

8. Visi skaičiai nuo 1 iki milijono surašyti į vieną eilę. Kiek skaitmenų yra toje eilėje?

9. Įrodykite, kad yra sveikųjų skaičių pora (x; y), tenkinanti lygtį $x^2 - y^2 = a^3$, kurioje a yra natūralusis skaičius.

10. Įrodykite, kad $a + b + c \geq \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}$, kai $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

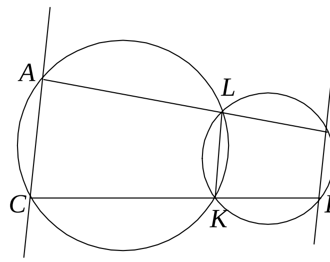
PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS KETVIRTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

(Vyresniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2002 m. lapkričio mėn. 29 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Tegu $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$, $k \geq 1$, yra Fibonačio skaičiai. Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$ skaičius x_{5n} dalijasi iš 5.



1 pav.

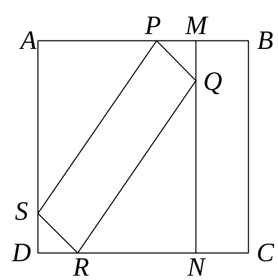
2. Du apskritimai kertasi taškuose K ir L, o tiesės, išvestos per tuos taškus, kerta vieną apskritimą taškuose A ir C, o kitą – taškuose B ir D (žr. 1 pav.). Įrodykite, kad tiesės, išvestos per taškus A ir C bei B ir D, yra lygiagrečios.

3. Keli draugai sėdi už apskrito stalo. Kiekvienas iš jų turi tam tikrą skaičių litų. Pirmasis turi vienu litu daugiau, negu antrasis, šis vienu daugiau už trečiąjį ir t.t. Pirmasis duoda litą antrajam, po to antrasis du litus trečiajam ir t.t. Taigi kiekvienas duoda vienu litu daugiau negu gavo ir procesas tęsiamas tol, kol kuris nors nebeturės ko pridėti. Pasibaigus dalyboms, buvo du kaimynai, kurių vienas turėjo 4 kartus daugiau litų negu kitas. Kiek žmonių sėdėjo už stalo ir kiek litų pradžioje turėjo pats neturtingiausias žmogus?

4. Raskite mažiausią teigiamą sveiką skaičių, turintį tokią savybę: jo pirmasis skaitmuo lygus 1, o perkėlus 1 į galą, gaunamas tris kartus didesnis skaičius.

5. Kritiniu namo aukštu pavadinkime aukštą, iš kurio išmetus vazą, ši sudūžta, o išmetus iš žemesnio aukšto, ji nedūžta. Yra dvi identiškos vazos ir žinoma, kad kritinis aukštas yra tarp 1 ir 36 (imtinai). Kokį minimalų skaičių kartų reikia mesti vazas, kad kritinio aukšto nustatymas būtų garantuotas?

6. Įrodykite, kad $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ dalijasi iš $(x-1)^2$ be liekanos.



2 pav.

7. Duotas vienetinis kvadratas $ABCD$ ir žinoma, kad stačiakampis $MBCN$ (žr. 2 pav.) lygus stačiakampiui $PQRS$. Raskite stačiakampio $MBCN$ kraštines.

8. Koridoriuje yra 1024 sunumeruotos iš eilės dėžutės su durelėmis. Mokinys atidaro pirmąją dėžutę, praleidžia antrąją, atidaro trečiąją, praleidžia ketvirtąją ir t.t. Pasiekęs galą, apsisuka ir atidaro pirmą neatidarytą (t.y. 1024-ją) dėžutę ir eina atgal, vėl atidarinėdamas kas antrą iš neatidarytų dėžučių. Pasiekęs galą, vėl apsisuka ir viskas prasideda iš naujo. Jis vaikšto tol, kol atidaro visas dureles. Koks paskutinės atidarytos dėžutės numeris?

9. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 5[x] + 2[y] = 19, \\ 3x + 4y = 21; \end{cases}$

   čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

10. Raskite funkciją $f(x)$, kuri su visais realiaisiais skaičiais x tenkina lygtį $2f(x) + f(1-x) = x^2$.