



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
PENKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**UŽDAVINIAI
(Jaunesniųjų klasių grupė)**

**Pasvalys, 2003 m. lapkričio mėn. 21 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

1. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

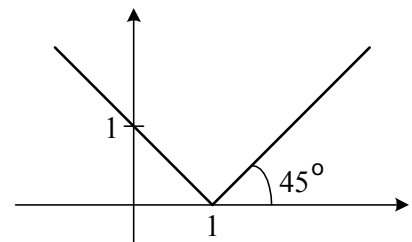
2. Supaprastinkite reiškini

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

3. Tegū a , b ir c yra tokie skaičiai, jog $a + b + c = 0$. Įrodykite, kad $ab + bc + ac \leq 0$.

4. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?

5. Skaičiaus x absoliutinis didumas žymimas $|x|$. Naudodami absoliutinio didumo ženklą, užrašykite funkciją $y = f(x)$, kurios grafikas turi 1 paveiksle nurodytą pavidalą.



1 pav.

6. Intervalas $[0; 1]$ padalijamas į tris lygias dalis ir vidurinė atkarpa

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

išmetama. Po to dvi likusios atkarpos dalijamos į tris lygias dalis ir vėl išmetamos vidurinės dalys.

Procesas kartojamas n kartų. Kokia likusių atkarpų ilgių suma?

7. Pu yra kiniečių ilgio vienetas, o mu yra jų ploto vienetas. Stačiakampio lauko plotis 21 pu, o plotas $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ mu. Žinodami, kad 1 pu = 2 žingsniais, 1 mu = 240 pu², raskite lauko ilgį žingsniais.

8. Viena lygiagretainio kraštinė ištempinama 20 %, o kita sutraukiama 20 %. Keliais procentais pasikeitė lygiagretainio plotas?

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n ($1 \leq n \leq 500$), nesidalijančių nei iš 2, nei iš 3?

10. Sakykime, kad n -tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
PENKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI
UŽDAVINIAI
(Vyresniųjų klasių grupė)**

**Pasvalys, 2003 m. lapkričio mėn. 21 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

1. Lygiagretainio $ABCD$ taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, o F – kraštinės CD vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesės AE ir AF dalija įstrižainę BD į tris lygias dalis.
2. Žinoma, kad daugianarį $p(x)$ dalijant iš $x+1$ gaunama liekana 1, o dalijant iš $x-1$ liekana yra 3. Kokia liekana bus dalijant $p(x)$ iš x^2-1 ?
3. Įrodykite, kad skaičius 2^k+1 nesidalija iš 7 su visais natūraliaisiais skaičiais k .
4. Duota $m \times n$ lentelė su skaičiais, tenkinančiais sąlygą: kiekvienas skaičius lentelėje yra lygus kaimyninių skaičių aritmetiniam vidurkiui (keturių, jei skaičius yra lentelės viduje, trijų, jei jis yra lentelės pakraštyje, dviejų, jei skaičius yra lentelės kampe). Įrodykite, kad visi lentelėje esantys skaičiai yra lygūs.
5. Įrodykite, kad tarp visų vienodo perimetro P trikampių maksimalų plotą turi lygiakraštis trikampis.
6. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?
7. Raskite sumą $S = f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2003}\right)$, jei $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$.
8. Žymėkime $a * b = a^b$. Raskite $\frac{2 * (2 * (2 * 2))}{((2 * 2) * 2) * 2}$.
9. Sakykime, kad n -tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?
10. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?