PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2005 m. lapkričio mėn. 25 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

VII–VIII klasių uždaviniai

1. Raskite visus natūraliuosius skaičius, kurie įrašius nulį tarp vienetų skaitmens ir dešimčių skaitmens padidėja 9 kartus.

2. Ar galima iš medžiagos atraižos, kurios ilgis $\frac{2}{3}$ metro, atkirpti $\frac{1}{2}$ metro dalį, neturint po ranka metro?

3. Stačiakampis *ABCD* padalintas į 9 mažesnius stačiakampius. Langeliuose yra įrašyti atitinkamų stačiakampių perimetrai (žr. pav.). Raskite stačiakampio *ABCD* perimetrą.

B *C*

	11	
20	8	11
	12	

A *D*

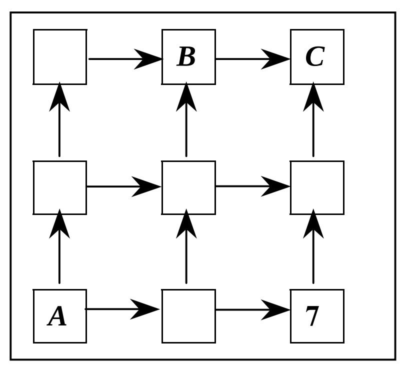
4. Į 5×5 lentelę surašykite skaičius 0 ir 1 taip, kad visuose 3×3 kvadratėliuose įrašytų skaičių sumos būtų skirtingos.

5. Iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4, rašydami juos po du kartus, sudarykite aštuonženklį skaičių, kuriame tarp dviejų vienetų yra vienas skaitmuo, tarp dvejetų yra du skaitmenys, tarp trejetų – trys skaitmenys, o tarp ketvertų yra keturi skaitmenys.

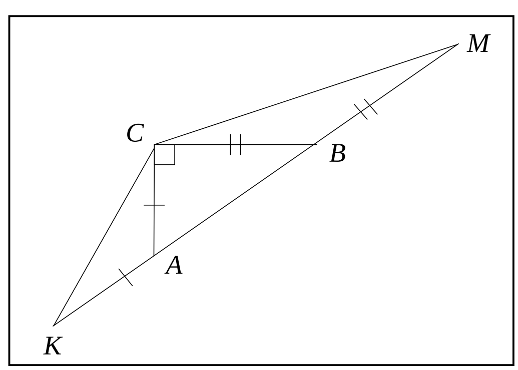
6. Nuvažiavęs trečdalį kelio, keleivis užmigo ir miegojo tol, kol liko nuvažiuoti trečdalį to kelio, kurį jis važiavo miegodamas. Kurią viso kelio dalį keleivis pramiegojo?

7. Dviejose klasėse yra 70 mokinių. Vienoje klasėje $\frac{7}{17}$ mokinių mėgsta žaisti krepšinį, o kitoje – $\frac{2}{9}$ mokinių mėgsta žaisti futbolą. Kiek mokinių yra kiekvienoje klasėje?

8. Devynios kortelės yra sunumeruotos nuo 1 iki 9 ir išdėliotos taip, kaip parodyta paveiksle.
Šioje lentelėje rodyklės yra nukreiptos nuo kortelės su mažesniu numeriu į kortelę su didesniu numeriu. Apskaičiuokite kortelių *A*, *B* ir *C* numerių sumą.



9. Tegu *ABC* yra statusis trikampis, o *AB* yra jo įžambinė. Tiesėje *AB* į priešingas puses nuo įžambinės yra atidėtos atkarpos *AK* ir *BM* (žr. pav.), kurių ilgiai yra $AK = AC$, $BM = BC$. Raskite kampo *KCM* didumą.



10. Iš trijų skaičių, *a*, *b* ir *c*, vienas yra teigiamas, vienas yra neigiamas ir vienas yra lygus nuliui. Skaičiai *a*, *b* ir *c* yra susiję lygybe $a^2 = b^2(b-c)$. Nustatykite, kuris skaičius yra lygus nuliui ir kokie yra kitų dviejų skaičių ženklai.

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2005 m. lapkričio mėn. 25 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

IX–X klasių uždaviniai

1. Tegu ABC yra statusis trikampis, kuriame $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$. Įrodykite, kad

$$AC \cdot BC = \frac{1}{4} AB^2 .$$

2. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n suma $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ dalijasi iš 9.

3. Tegu $a_1, a_2, ..., a_n$ yra teigiami skaičiai, kurių sandauga lygi 1. Įrodykite, kad

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n .$$

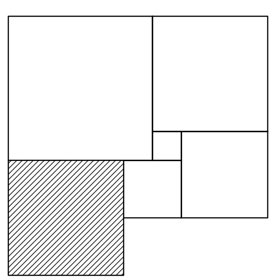
4. Jonas už gerą pažymį (sakykime, 8) gavo n dviejų litų monetų. Petras už geresnį pažymį gavo mažiausią sumą, didesnę už 2n litų, kurią galima sumokėti 5 Lt monetomis. Už geriausią pažymį Povilas gavo mažiausią sumą, didesnę už Petro, kurią galima sumokėti 10 Lt banknotais. Koks didžiausias skirtumas galėtų būti tarp Povilo ir Jono gautų pinigų?

5. 175 obuoliai yra sudėti į kelias lygias krūveles. Dviejų krūvelių obuolius išskirsčius į likusias krūveles, jose prisidėtų po 10 obuolių. Raskite krūvelių skaičių.

6. Ar įmanoma surašyti skaičius 0 ir 1 į 6×6 lentelę taip, kad visuose 3×3 kvadratėliuose įrašytų skaičių sumos būtų skirtingos?

7. Yra dešimt atkarpų, kurių ilgiai nelyginiai sveikieji skaičiai, mažesni už 100. Įrodykite, kad iš kurių nors trijų atkarpų galima sudaryti trikampį.

8. Paveiksle pavaizduotą figūrą sudaro kvadratai. Paties mažiausio kvadrato kraštinės ilgis yra lygus 1. Raskite nuspalvinto kvadrato kraštinės ilgį.



9. Trapecijos pagrindų ilgiai yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad šią trapeciją galima suskaidyti lygiais trikampiais.

10. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais n, priklausančiais intervalui [2000; 2005], skaičius $6{,}25 \cdot 10^n$ yra kurio nors sveikojo skaičiaus ketvirtasis laipsnis?

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2005 m. lapkričio mėn. 25 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

XI–XII klasių uždaviniai

1. Įrodykite, kad jei $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ir $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2. Raskite sumą

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

3. Nustatykite, kiek nulių yra sumoje S, kai

$$S=9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{99\text{ skaitmenys}}.$$

4. Išspręskite lygtį

$$2(x-6)=\frac{x^2}{(1+\sqrt{x+1})^2}.$$

5. Įrodykite, kad kvadratinė lygtis $ax^2+bx-c=0$ turi tik vieną sprendinį, priklausantį intervalui $[0;1]$, kai a, b ir c yra kurio nors trikampio kraštinių ilgiai.

6. Natūraliųjų skaičių x, y ir z suma yra lygi 407. Raskite didžiausią skaičių nulių, kuriais gali baigtis sandauga xyz.

7. Užpildykite lentelę įrašydami skaičius tuščiuose langeliuose ir vietoj raidžių. Šioje lentelėje kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos įstrižainės skaičių sandauga yra ta pati ir lygi skaičiui $\overline{ABCD}$ (A, B, C ir D yra skirtingi skaitmenys).

		4
	$\overline{AC}$	
	C	24

8. Raskite begalinių periodinių trupmenų $0,\overline{19}=0,191919\ldots$ ir $0,\overline{199}=0,199199199\ldots$ sumos $0,\overline{19}+0,\overline{199}$ periodą (trupmenos $0,\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ periodas yra n).

Nurodymas. $0,\overline{19}=\frac{19}{99}$, nes $0,\overline{19}\cdot(100-1)=19,\overline{19}-0,\overline{19}=19$.

9. Taškas E trapecijos $ABCD$ šoninę kraštinę CD dalija santykiu 2:1 ($CE:ED=2:1$). Atkarpa AE trapecijos įstrižainę BD kerta taške O; be to, $AO:OE=5:1$. Trikampio AOB plotas lygus $26\ \text{cm}^2$. Raskite: 1) trikampio DOE plotą; 2) trapecijos $ABCD$ plotą.

10. Su kokiu sveikuoju skaičiumi k lygties $\operatorname{tg}^2\alpha-2005\operatorname{tg}\alpha+1=0$ sprendinių, priklausančių intervalui $[0;2\pi]$, suma yra lygi $k\pi$?