PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
(Jaunesniųjų klasių grupė)

1. Sraigė plokštumoje iš taško A šliaužia pastoviu greičiu tiesės atkarpomis, kas 15 minučių 90° kampu keisdama judėjimo kryptį. Įrodykite, kad sraigė gali sugrįžti į pradinį tašką tik per sveiką valandų skaičių.

2. Nesinaudodami skaičiuokliu nustatykite, kuris skaičius didesnis:

$$\sqrt{2005}+\sqrt{2007} \quad \text{ar} \quad 2\sqrt{2006}.$$

3. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{-99}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{0}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{99}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}.$$

4. Tris kvadratinius šokoladukus 3×3, 4×4 ir 5×5 reikia po lygiai padalyti penkiems žmonėms. Raskite minimalų perlaužimų skaičių. Šokoladas laužiamas tik per linijas.

5. Sveikieji skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybę

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}.$$

Ar jų sandauga $abcd$ gali būti lygi 1000?

6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

7. Trys kalbininkai užsirašė po 100 žodžių, o paskui savo užrašus lygino tarpusavyje. Sutapus žodžiui nors dviejų kalbininkų sąrašuose, tą žodį išbraukdavo. Ar galėjo atsitikti taip, kad pirmojo kalbininko sąraše liko 54, antrojo – 75, o trečiojo – 80 neišbrauktų žodžių?

8. Ar galima ratu surašyti keturis vienetus, tris dvejetus ir tris trejetus taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių suma nesidalytų iš 3?

9. Natūralųjį skaičių galima dauginti iš 2 arba sukeisti jo skaitmenis vietomis (negalima tik rašyti nulio pirmoje pozicijoje). Ar šiais veiksmais galima iš 1 gauti 811?

10. Įrodykite, kad $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}\geq 1$, jei $a,b>0$ ir $ab=1$.

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
(vyresniųjų klasių grupė)

1. Raskite formulę sumai $3+33+333+...+\underbrace{333...3}_{n \text{ trejetukų}}$ skaičiuoti.

2. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a.$$

3. Duotas 19° kampas. Skriestuvo ir liniuotės pagalba nubrėžti 1° kampą.

4. Teigiami skaičiai x ir y tenkina nelygybę

$$y^3+y\le x-x^3.$$

Įrodykite, kad a) $y<x<1$ ir b) $x^2+y^2<1$.

5. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2006. Leidžiama nutrinti du skaičius ir vietoje šių skaičių parašyti jų skirtumą. Įrodykite, kad jeigu atlikus tam tikrą skaičių kartų šią procedūra lieka tik nulis, tai skaičiavimuose padaryta klaida.

6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

7. Raskite natūraliųjų skaičių x, tenkinančių lygtį

$$\left[\frac{x}{99}\right]=\left[\frac{x}{101}\right], \qquad (1)$$

skaičių; čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis.

8. Įrodykite tokį teiginį: jei realieji skaičiai a, b ir c tenkina nelygybes

$$|a-b|\ge|c|,\ |b-c|\ge|a|,\ |c-a|\ge|b|,$$

tai nors vienas iš jų yra kitų dviejų suma.

9. Trys dviženkliai skaičiai pasižymi tokia savybę: bet kurių dviejų suma yra lygi trečiajam, tik su sukeistais skaitmenimis. Kokia galėtų būti šių trijų skaičių suma?

10. Sporto turnyras vyksta olimpine sistema: dalyviai varžosi vienas prieš vieną, pralaimėjęs iškrenta, o nugalėtojas patenka į kitą etapą. Kiekvienas iš 512 sportininkų turi individualų numerį (nuo 1 iki 512). Ar gali nutikti taip, kad visose varžovų porose jų numerių skirtumas neviršija 30?