



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2007 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

U Ž D A V I N I A I

9–10 klasė

1. Lentelėse 3×3 langeliuose yra įrašyti natūralieji skaičiai (žr. pav.). Du mokiniai, Jonas ir Petras, išbraukė po keturis skaičius. Jono išbrauktų skaičių suma yra tris kartus didesnė už Petro išbrauktų skaičių sumą. Nustatykite, koks skaičius liko lentelėje.

4	12	8
13	24	14
7	5	23

2. Padalijus triženklį skaičių a iš 9, gaunamas skaičius b , kurio skaitmenų suma yra devyniais mažesnė už skaičiaus a skaitmenų sumą. Raskite visus triženklus skaičius a , turinčius šią savybę.
3. Koku laipsniu reikia pakelti skaičių 4^4 , kad gautume skaičių 8^8 ?

4. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = x.$$

5. Į vieną eilę surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2006, 2007. Nubraukiami pirmi 2006 skaitmenys. Koks likusio skaičiaus pirmasis skaitmuo.
6. Tegū a ir b yra sveikieji skaičiai. Nustatykite, ar b^2 dalijasi iš $a + b$, jei a^2 dalijasi iš $a + b$.
7. Tegū PA ir PB yra apskritimo su centru O liestinės taškuose A ir B . Trečia to apskritimo liestinė, kerta atkarpas PA ir PB taškuose X ir Y . Įrodykite, kad kampas XOY nepriklauso nuo trečiosios liestinės pasirinkimo.

8. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

9. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalijant iš 4 gaunama liekana 3, dalijant iš 5 gaunama liekana 4, o dalijant iš 6 gaunama liekana 5.
10. Languotos kvadratinės lentelės, kurios matmenys 10×10 , langeliuose išdėliotos šachmatų figūros. Kiekvienoje lentelės eilutėje stovi skirtingas figūrų skaičius (gali būti ir 0). Visiškai taip pat, nėra jokių dviejų stulpelių, kuriuose būtų po lygiai šachmatų figūrų (vienas stulpelis gali būti tuščias). Kiek iš viso šachmatų figūrų yra ant lentelės? Raskite visus galimus atsakymus ir pagrįskite juos.



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2007 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

U Ž D A V I N I A I

11–12 klasė

1. Kiekvienas šachmatų turnyro dalyvis lygiai pusę savo taškų surinko prieš žaidėjus iš blogiausiai pasirodžiusių dešimtuko. Kiek žaidėjų dalyvavo turnyre?

Pastaba. Visi turnyro dalyviai žaidė po vieną partiją su kiekvienu varžovu. Pergalė – 1 t., lygiosios – 0,5 t., pralaimėjimas – 0 t.

2. Tušti kvadrato langeliai užpildomi natūraliaisiais skaičiais taip, kad eilučių ir stulpelių skaičiai sudarytų aritmetines progresijas. Kam lygus skaičius x ?

			x	
	74			
				186
		103		
0				

3. Funkcija f apibrėžta formule $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Raskite $\underbrace{f(f(f(\dots f(x)\dots)))}_{2007 \text{ kartus}}$.

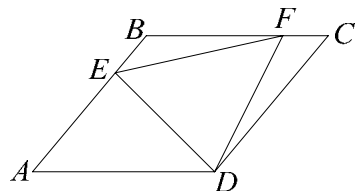
4. Su koku didžiausiu natūraliuoju skaičiumi n skaičius $n!$ ($n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) yra $(n-3)$ gretimų natūraliųjų skaičių sandauga? *Tokio skaičiaus pavyzdys* $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$.

5. Įrodykite, kad suma $x + \frac{1}{x}$ nėra sveikasis skaičius nė su vienu racionaliuoju $x \neq \pm 1$.

6. Su koku natūraliuoju k dydis $a_k = \frac{k^2}{(1,001)^k}$ įgyja didžiausią reikšmę?

7. Įrodykite, kad skaičius $m^4 + 4$, $m \in \mathbb{N}$, yra pirminis tik tuo atveju, kai $m = 1$.

8. Rombo $ABCD$ kraštinėse AB ir BC pažymėti taškai E ir F , tokie kad $AE = 5BE$, $BF = 5CF$. Be to, yra žinoma, kad $\triangle DEF$ – lygiakraštis. Raskite $\angle BAD$.



9. Languotos kvadratinės lentelės, kurios matmenys 10×10 , langeliuose išdėliotos šachmatų figūros. Kiekvienoje lentelės eilutėje stovi skirtingas figūrų skaičius (gali būti ir 0). Visiškai taip pat nėra jokių dviejų stulpelių, kuriuose būtų po lygiai šachmatų figūrų (vienas stulpelis gali būti tuščias). Kiek iš viso šachmatų figūrų yra ant lentelės? Raskite visus galimus atsakymus ir pagrįskite juos.
10. UAB „Trigalvis slibinas“ yra valdoma dešimties akcininkų. Yra žinoma, kad bet kurie 6 iš jų kartu sudėjus turi ne mažiau kaip pusę visų akcijų. Kiek daugiausia akcijų (procentais) gali turėti didžiausias akcininkas?