PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
JAUNESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, su kuriomis galioja lygybė $x + y = xy$.

2. Raskite visas natūraliųjų skaičių m ir n poras $(m; n)$, su kuriomis

$$2^n = m^2 + 1.$$

3. Šachmatų pavidalo 4×4 lentos langeliuose bet kaip išdėliota 16 akmenukų (po vieną kiekviename langelyje). Šie akmenukai trijų spalvų: baltos, mėlynos ir raudonos. Įrodykite, kad yra bent viena eilutė ir stulpelis, turintys dar po vieną tos pačios spalvos akmenuką kaip ir jų susikirtimo langelyje esančio akmenuko.

4. Šachmatų turnyre dalyvavo dvi mergaitės ir nedaugiau kaip trylika berniukų. Visos dalyvių poros sužaidė po vieną partiją. Mergaitės surinko 8 taškus, o visi berniukai – po vienodą taškų skaičių (už pergalę skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – pusė taško, o pralaimėjus taškai neskiriami). Kiek žaidėjų dalyvavo šiame turnyre?

5. Dešimtyje dėžučių yra po 50 vienodų monetų. Devyniose yra tikros monetos, sveriančios po 10 gramų, o vienoje dėžutėje monetos netikros; jos sveria po 9 gramus, tačiau vizualiai nesiskiria nuo tikrų. Vienu svėrimu (elektroninėmis svarstyklėmis) reikia nustatyti, kurioje dėžutėje yra netikros monetos.

6. Išspręskite lygtį $x = 1 - 2009(1 - 2009x^2)^2$.

7. Atkarpa AM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, o N – atkarpos AM vidurio taškas. Nustatykite, kokiu santykiu kraštinę AC dalija tiesė, einanti per taškus B ir N.

8. Įrodykite, kad $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$, kai x yra bet kuris realusis skaičius.

9. Tarkime, kad m ir n yra tokie sveikieji skaičiai, kuriems esant $m^2 + 9mn + n^2$ dalijasi iš 11. Įrodykite, kad tada $m^2 - n^2$ taip pat dalijasi iš 11.

10. Stačiojo trikampio ABC statinio AB vidurio taškas D yra apskritimo, kurio skersmuo lygus AB, centras. Šis apskritimas įžambinę BC dalija santykiu $1:3$. Raskite trikampio ABC smailiuosius kampus.

PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Kaip per trikampio viršūnę nubrėžti tiesę, nekertančią trikampio, kad atstumų nuo kitų dviejų to trikampio viršūnių iki tos tiesės suma būtų didžiausia?

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais $n > 1$ teisingos nelygybės:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

3. Rasti visus natūraliųjų skaičių trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygtį

$$x + y + z = xyz .$$

4. Dviejų kubų, kurių briaunų ilgis yra lygus 1, centrai sutampa. Įrodykite, kad jų bendros dalies tūris yra nemažesnis už $\frac{\pi}{6}$.

5. Raskite aritmetinę progresiją, kurios pirmųjų n narių suma S_n yra lygi n^2 su visais $n \geq 1$.

6. Nesinaudodami logaritmų lentelėmis, įrodykite, kad

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

7. Įrodykite, kad $a + b + c$ ir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ negali būti abu lygūs nuliui, kai a, b ir c nelygūs nuliui realieji skaičiai.

8. Tegu x ir y yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys lygybę $x^3 + y^3 = 2xy$. Įrodykite, kad $x < \sqrt[3]{4}$ ir $y < \sqrt[3]{4}$.

9. Skaičių a ir b porą $(a; b)$ vienu ėjimu galima pakeisti viena iš porų: $(a+1; b-2)$, $(a-2; b+1)$, $(a-1; b+2)$. Ar tokiais ėjimais iš poros $(13, 17)$ galima gauti porą $(8, 18)$?

10. Tegu N yra pirmųjų n pirminių skaičių $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ sandauga. Įrodykite, kad $N + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.