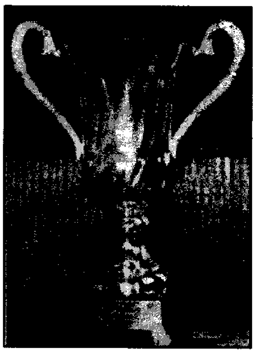


PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
JAUNESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x;\, y)$, su kuriomis galioja lygybė $x + y = xy$.

Sprendimas. Pertvarkykime lygtį $x + y = xy$:
$x + y = xy \Rightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 1.$
Kadangi $x-1$ ir $y-1$ sveikieji skaičiai, tai jų sandauga lygi vienetui tik tada, kai $x-1=1$ ir $y-1=1$ arba $x-1=-1$ ir $y-1=-1$. Gauname $x = y = 2$ arba $x = y = 0$.
Ats.: $(0;0)$, $(2;2)$.

2. Raskite visas natūraliųjų skaičių m ir n poras $(m;\, n)$, su kuriomis

$$2^n = m^2 + 1.$$

Sprendimas. Kai $n = 1$, gauname $m = 1$. Kai $n \geq 2$, skaičius 2^n dalijasi iš 4; tačiau m^2+1 nesidalija iš 4, kai m yra natūralusis skaičius (jei $m = 2k$, tai $m^2+1 = 4k+1$; jei $m = 2k+1$, tai $m^2+1 = 4k^2+4k+2 = 4(k^2+k)+2$).
Ats.: $(1;1)$.

3. Šachmatų pavidalo 4×4 lentos langeliuose bet kaip išdėliota 16 akmenukų (po vieną kiekviename langelyje). Šie akmenukai trijų spalvų: baltos, mėlynos ir raudonos. Įrodykite, kad yra bent viena eilutė ir stulpelis, turintys dar po vieną tos pačios spalvos akmenuką kaip ir jų susikirtimo langelyje esančio akmenuko.

Sprendimas. Kadangi akmenukai trijų spalvų, tai pirmoje lentos eilutėje yra bent du tos pačios spalvos akmenukai; tarkime, kad jie raudoni ir yra pirmuose dviejuose langeliuose (žr. 1 pav.).

R	R		

1 pav.

R	R		
B			
B			

2 pav.

R	R		
B	M		
B	M		

3 pav.

R	B		
R	M	R	R
B	M	R	R

4 pav.

Jei pirmame stulpelyje būtų dar vienas raudonas akmenukas, tai įrodymas baigtųsi, todėl tarkime, kad pirmame stulpelyje tarp kitų akmenukų nėra raudono. Aišku, kad tada du akmenukai yra tos pačios spalvos; sakykime, baltos (žr. 2 pav.).

Jei antrame stulpelyje greta baltų akmenukų būtų baltas arba raudonas, tai įrodymas baigtųsi. Priešingu atveju abu akmenukai yra mėlyni (žr. 3 pav.).

Jei likusiuose keturiuose antros ir trečios eilučių langeliuose būtų bent vienas baltas arba mėlynas akmenukas, įrodymas baigtųsi. Tačiau ir priešingu atveju (kai visi keturi akmenukai raudoni) įrodymas baigiasi (žr. 4 pav.).

4. Šachmatų turnyre dalyvavo dvi mergaitės ir nedaugiau kaip trylika berniukų. Visos dalyvių poros sužaidė po vieną partiją. Mergaitės surinko 8 taškus, o visi berniukai – po vienodą taškų skaičių (už pergalę skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – pusė taško, o pralaimėjus taškai neskiriami). Kiek žaidėjų dalyvavo šiame turnyre?

Sprendimas. Tegu x yra turnyre dalyvavusių berniukų skaičius. Tada bendras sužaistų partijų skaičius $\frac{(x+1)(x+2)}{2}$; toks pat yra ir bendras taškų skaičius. Jei k pažymėtume kiekvieno berniuko surinktų taškų skaičių, tai galėtume sudaryti lygtį

$$8+kx=\frac{(x+1)(x+2)}{2}.$$

Atlikę veiksmus, gauname lygtį $x(x+3-2k)=14$. Matome, kad galimos x reikšmės yra 1, 2, 7, 14. Reikšmės 1 ir 2 netinka, nes turėtume $k<0$, o 14 netenkina sąlygos $x\le 13$. Tiktai reikšmė $x=7$ tenkina ir lygtį, ir uždavinio sąlygą $x\le 13$. Kai $x=7$, tai $k=4$.

Ats.: 15.

5. Dešimtyje dėžučių yra po 50 vienodų monetų. Devyniose yra tikros monetos, sveriančios po 10 gramų, o vienoje dėžutėje monetos netikros; jos sveria po 9 gramus, tačiau vizualiai nesiskiria nuo tikrų. Vienu svėrimu (elektroninėmis svarstyklėmis) reikia nustatyti, kurioje dėžutėje yra netikros monetos.

Sprendimas. Dėžutes sunumeruokime nuo 1 iki 10 ir paimkime atitinkamai po vieną, dvi, tris ir t. t. monetas iš kiekvienos dėžutės; iš viso turėsime 55 monetas. Tikrų monetų svoris turėtų būti 550 gramų. Jei pažymėtume p pasirinktųjų monetų bendrą svorį, tai skirtumas $550-p$ ir parodytų ieškomos dėžutės numerį.

6. Išspręskite lygtį $x=1-2009(1-2009x^2)^2$.

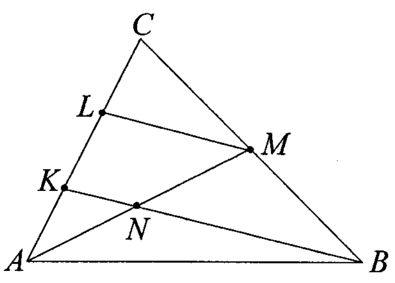
Sprendimas. Tegu $z=1-2009x^2$. Tada įrašę į lygtį gausime $x=1-2009z^2$. Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} z=1-2009x^2, \\ x=1-2009z^2 \end{cases}$$

ir gauname $z-x=2009(z^2-x^2)$. Iš čia $z=x$ arba $z=\frac{1}{2009}-x$. Belieka išspręsti dvi kvadratines lygtis:

$$2009x^2+x-1=0 \text{ ir } 2009x^2-x-\frac{2008}{2009}=0.$$

7. Atkarpa AM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, o N – atkarpos AM vidurio taškas. Nustatykite, kokiu santykiu kraštinę AC dalija tiesė, einanti per taškus B ir N.



Sprendimas. Nubrėžkime $ML \parallel BK$. Atkarpa ML yra trikampio BKC vidurinė linija; todėl $KL=LC$. Kadangi KN yra trikampio ALM vidurinė linija, tai $AK=KL$. Vadinasi, $AK=KL=LC$, o ieškomasis santykis $AK:KC$ yra $1:2$.

Ats.: $1:2$.

8. Įrodykite, kad $x^8-x^5+x^2-x+1>0$, kai x yra bet kuris realusis skaičius.

Sprendimas.

<u>1 būdas</u>. $x^8-x^5+x^2-x+1=(x^8-x^5+x^2)-x+1=x^2(x^6-x3+1)-x+1=$

$$=x^2\left(\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-x+1=x^2\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x^2-x+1\right)=x^2\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\right)=$$

$$=x^2\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right)=x^2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0.$$

<u>2 būdas.</u> Kai $x\le 0$, nelygybė akivaizdi.

Kai $0<x<1$, tai $1-x>0$ ir $x^2-x^5>0$; todėl

$$x^8-x^5+x^2-x+1=x^8+(x^2-x^5)+(1-x)>0.$$

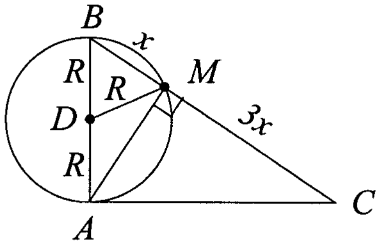
Kai $x\ge 1$, tai $x^8-x^5\ge 0$ ir $x^2-x\ge 0$; todėl

$$x^8-x^5+x^2-x+1=(x^8-x^5)+(x^2-x)+1>0.$$

9. Tarkime, kad m ir n yra tokie sveikieji skaičiai, kuriems esant $m^2+9mn+n^2$ dalijasi iš 11. Įrodykite, kad tada m^2-n^2 taip pat dalijasi iš 11.

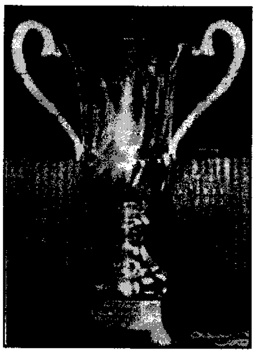
Sprendimas. Kadangi $m^2+9mn+n^2$ dalijasi iš 11 ir $m^2+9mn+n^2=(m-n)^2+11mn$, tai $(m-n)^2$, taigi ir $m-n$, dalijasi iš 11, nes 11 yra pirminis skaičius. Vadinasi, $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ dalijasi iš 11.

10. Stačiojo trikampio ABC statinio AB vidurio taškas D yra apskritimo, kurio skersmuo lygus AB, centras. Šis apskritimas įžambinę BC dalija santykiu $1:3$. Raskite trikampio ABC smailiuosius kampus.



Sprendimas. Trikampis ABM yra statusis, todėl $AM^2=4R^2-x^2$. Iš stačiojo trikampio AMC randame $AC_2=AM^2+MC^2=(4R^2-x^2)+9x^2=4R^2-8x^2$. Pagal Pitagoro teoremą iš trikampio ABC gauname lygybę $4R^2+(4R^2+8x^2)=16x^2$, iš kurios išplaukia, kad $x=R$. Taigi trikampis DBM yra lygiakraštis; $\angle B=60°$.

Ats.: $60°$ ir $30°$.



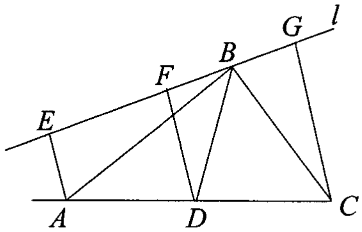
PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Kaip per trikampio viršūnę nubrėžti tiesę, nekertančią trikampio, kad atstumų nuo kitų dviejų to trikampio viršūnių iki tos tiesės suma būtų didžiausia?

Sprendimas. Tegu trikampyje ABC per viršūnę B nubrėžta tiesė l ir BD yra pusiaukraštinė, o AE, DF ir CG yra statmenys į tiesę l. Kadangi DF yra trapecijos $AEGC$ vidurinė linija, tai $\frac{1}{2}(AE+CG)=DF\le BD$. Iš čia aišku, kad didžiausia suma atstumų nuo viršūnių A ir C iki tiesės l bus tada, kai tiesė l bus statmena pusiaukraštinei BD.



2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais $n>1$ teisingos nelygybės:

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n.$$

Įrodymas. Taikysime matematinę indukciją. Tegu $A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}$.

Kai $n=2$, $A_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ ir $\frac{1}{2}<A_2<2$.

Tegu $n=k$ ir $\frac{k}{2}<A_k<k$. Turime, kad

$A_{k+1}=A_k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=A_k+B_k$; čia $B_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$.

Pastaroji suma turi 2^k dėmenų, iš kurių didžiausias yra $\frac{1}{2^k}$, o mažiausias yra $\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Todėl

$$\frac{1}{2}<\frac{2^k}{2^{k+1}-1}<B_k<\frac{1}{2^k}\cdot 2^k=1.$$

Vadinasi,

$$\frac{k}{2}+\frac{1}{2}<A_k<k+1.$$

Belieka pasinaudoti matematinės indukcijos principu.

3. Rasti visus natūraliųjų skaičių trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygtį

$$x+y+z=xyz.$$

Sprendimas Ieškome sprendinių tenkinančių sąlygą $x \le y \le z$. Kitus sprendinius, pasinaudoję lygties simetrija, rasime perstatę komponentes vietomis.

Turime, kad $x+y+z \le 3z$ ir tuo pačiu $xyz \le 3z$, arba $xy \le 3$.

Kai $xy=1$, $x=1$ ir $y=1$, bet iš lygties tada turėtų būti $2+z=z$, kas yra neįmanoma.

Kai $xy=2$, $x=1$ ir $y=2$, o iš lygties randame, kad $3+z=2z$, t. y. $z=3$. Vadinasi, $(1; 2; 3)$ yra lygties sprendinys, tenkinantis prielaidą.

Kai $xy=3$, $x=1$, $y=3$, o iš lygties rastume, kad $4+z=3z$, t. y. $z=2$. Sprendinys $(1; 3; 2)$ netenkina prielaidos $x \le y \le z$.

Vadinasi, visi sprendiniai randami perstatiniais iš $(1; 2; 3)$.

Ats.: $(1; 2; 3)$; $(1; 3; 2)$; $(2; 1; 3)$; $(2; 3; 1)$; $(3; 2; 1)$; $(3; 1; 2)$.

4. Dviejų kubų, kurių briaunų ilgis yra lygus 1, centrai sutampa. Įrodykite, kad jų bendros dalies tūris yra nemažesnis už $\frac{\pi}{6}$.

Sprendimas. Kadangi kubų centrai sutampa, o jų sienos nutolusios nuo centro atstumu $\frac{1}{2}$, tai kubų sankirtai priklausys įbrėžtiniai rutuliai, kurių centrai sutampa su kubų centrais ir kurių spinduliai lygūs $\frac{1}{2}$. Vadinasi, kubų sankirtos tūris bus nemažesnis už $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$.

5. Raskite aritmetinę progresiją, kurios pirmųjų n narių suma S_n yra lygi n^2 su visais $n \ge 1$.

Sprendimas. Imame aritmetinę progresiją $a, a+d, ..., a+(n-1)d, ...$ Pagal sąlygą

$$S_n = \frac{(2a+(n-1)d)n}{2} = n^2; \ n \ge 1.$$

Iš čia

$$2a+(n-1)d = 2n$$

arba

$$n(d-2) = d-2a, \ n \ge 1.$$

Kadangi d ir a yra pastovūs, o $n \ge 1$ yra bet koks, todėl būtinai $d-2a=0$ ir $d-2=0$. Iš čia $d=2$, $a=1$.

Vadinasi, ieškomoji progresija yra 1, 3, 5, 7, ...

6. Nesinaudodami logaritmų lentelėmis, įrodykite, kad

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

Sprendimas. Perėję prie logaritmų pagrindu π turime, kad

$$\log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > 2.$$

7. Įrodykite, kad $a+b+c$ ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ negali būti abu lygūs nuliui, kai a, b ir c nelygūs nuliui realieji skaičiai.

Sprendimas. Tarkime, kad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$; tada

$$ab+bc+ac=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2>0\Rightarrow a+b+c\neq 0.$$

Tarus, kad $a+b+c=0$, pakanka pažymėti $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ ir pasinaudoti pirmąja įrodymo dalimi.

8. Tegu x ir y yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys lygybę $x^3+y^3=2xy$. Įrodykite, kad $x<\sqrt[3]{4}$ ir $y<\sqrt[3]{4}$.

Sprendimas.

<u>1 būdas.</u> Tarkime, kad $x\geq y$. Tada

$$2xy=x^3+y^3\geq 2y^3\Rightarrow x\geq y^2;$$

$$2xy=x^3+y^3>x^3\Rightarrow y>\frac{x^2}{2}.$$

Taigi $\frac{x^4}{4}<y^2\leq x$. Iš čia $x^3<4$ ir $x<\sqrt[3]{4}$.

Remdamiesi reiškinio simetrija x ir y atžvilgiu, darome išvadą, kad galioja ir nelygybė $x<\sqrt[3]{4}$.

<u>2 būdas.</u> Tarkime, kad $x\geq\sqrt[3]{4}$ ir $y\leq 1$. Tada $x^3>2x$, nes $x^2\geq\sqrt[3]{16}>2$; todėl $x^3+y^3>2xy$.

Jei būtų $x\geq\sqrt[3]{4}$ ir $y>1$, tai gautume $x^3+y^3\geq 2\sqrt{x^3y^3}>2\sqrt{x^2y^2}=2xy$.

Vadinasi, $x<\sqrt[3]{4}$.

9. Skaičių a ir b porą $(a;b)$ vienu ėjimu galima pakeisti viena iš porų: $(a+1;b-2)$, $(a-2;b+1)$, $(a-1;b+2)$. Ar tokiais ėjimais iš poros $(13,17)$ galima gauti porą $(8,18)$?

Sprendimas. Galima:

$$(13,17)\xrightarrow[(-2,+1)]{}(11,18)\xrightarrow[(-2,+1)]{}(9,19)\xrightarrow[(-2,+1)]{}(7;20)\xrightarrow[(+1,-2)]{}(8,18).$$

10. Tegu N yra pirmųjų n pirminių skaičių $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ sandauga. Įrodykite, kad $N+1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Tarkime, kad $N+1$ yra natūraliojo skaičiaus a kvadratas. Tada

$$N+1=a^2\Rightarrow N=a^2-1=(a-1)(a+1).$$

Skaičius N yra lyginis, todėl a turi būti nelyginis skaičius. Bet šiuo atveju ir $a-1$, ir $a+1$ yra lyginiai skaičiai. Vadinasi, skaičius N turėtų dalytis iš 4; tačiau tai prieštarauja skaičiaus N apibrėžimui.