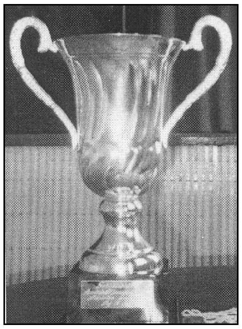


PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2010 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I Ų   S P R E N D I M A I
JAUNESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n trupmena $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ yra nesuprastinama.

Įrodymas. Užtenka įsitikinti, kad skaičių $12n+1$ ir $30n+2$ bendras didžiausias daliklis yra lygus 1. Akivaizdu, kad tas b. d. d. yra lygus skaičių $12n+1$ ir $(30n+2)-2(12n+1)=6n$ b. d. d. Pastarųjų skaičių b. d. d. yra lygus 1.

2. Kvadratas su kraštine a tiesėmis, lygiagrečiomis su jo kraštinėmis, padalytas į n^2 lygių kvadratų. Į kiekvieną gautą kvadratą įbrėžiamas skritulys. Įrodykite, kad dalies pradinio kvadrato, nepadengto skrituliais, plotas nepriklauso nuo n.

Įrodymas. Kiekvieno skritulio plotas yra lygus $\pi\dfrac{a^2}{4n^2}$. Tad pradinio kvadrato dalies, ar padalyto skritulio plotas bus lygus

$$a^2 - n^2 \cdot \pi\frac{a^2}{4n^2} = a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Skaičiai $a_1, ..., a_n$, kurių kiekvienas lygus +1 arba –1, yra tokie, kad

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0. \qquad (*)$$

Įrodykite, kad n yra dalus iš 4.

Sprendimas. Kadangi

$$(a_1a_2)\,(a_2a_3)\,...\,(a_{n-1}a_n)\,(a_na_1) = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)^2 = 1, \qquad (**)$$

tai darome išvadą, kad sandaugoje $(**)$ neigiamų dauginamųjų a_ja_{j+1} skaičius yra lyginis, t. y. $m=2k$. Iš kitos pusės, iš $(*)$ išplaukia, kad tarp jų neigiamų ir teigiamų turi būti po lygiai. Vadinasi, $n=2m=4k$.

4. Nustatykite, kiek nesuprastinamų trupmenų yra tarp šių trupmenų:

$$\frac{1}{144}, \frac{2}{144}, \frac{3}{144}, ..., \frac{143}{144}.$$

Sprendimas. Bendrąjį visų trupmenų vardiklį 144 galima išskaidyti pirminiais skaičiais taip: $144 = 2^4 \cdot 3^2$.

Iš 2 dalijasi visi lyginiai trupmenų skaitikliai; tokių trupmenų yra 71.

Iš 3 dalijasi nelyginiai skaičiai 3, 9, 15, 21, 27, ... , 141, t. y. skaičiai, kuriuos galima užrašyti formule $3(2n-1)$, $n = 1, 2, 3, ..., 47$; trupmenų su tokiais skaitikliais yra 24.

Taigi nesuprastinamų trupmenų yra $143-(71+24)=48$.

Ats.: 48.

5. Natūralieji skaičiai 12, 15 ir n turi tokią savybę: bet kurių dviejų sandauga dalijasi iš trečiojo. Raskite galimai mažiausią n reikšmę.

Sprendimas. Pagal sąlygą turi galioti tokios lygybės:

$$12\cdot 15 = kn, \quad 12n = 15l \ \text{ ir } \ 15n = 12m$$

(čia k, l, m – kurie nors natūralieji skaičiai). Jas galima užrašyti taip:

$$2^2\cdot 3^2\cdot 5 = kn, \quad 2^2\cdot n = 5l, \quad 5n = 2^2\cdot m.$$

Iš antros lygybės išplaukia, kad n turi dalytis iš 5, o iš trečiosios išplaukia, kad n turi dalytis iš 4. Tai neprieštarauja pirmajai sąlygai.

Vadinasi, galimai mažiausia n reikšmė yra $5\cdot 4 = 20$.

Ats.: 20.

6. Skaičiai a ir b tenkina dvi sąlygas:

$$ab + ab^2 + ... + ab^{10} = 18$$

ir

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab^2} + ... + \frac{1}{ab^{10}} = 6.$$

Raskite skaičių $ab, ab^2, ..., ab^{10}$ sandaugą.

Sprendimas.

$$\begin{cases} ab + ab^2 + ... + ab^{10} = 18, \\ \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ab^2} + ... + \dfrac{1}{ab^{10}} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab(1 + b + ... + b^9) = 18, \\ \dfrac{b^9 + b^8 + ... + b + 1}{ab^{10}} = 6 \end{cases} \Rightarrow ab\cdot 6ab^{10} = 18 \Rightarrow a^2b^{11} = 3.$$

Kadangi

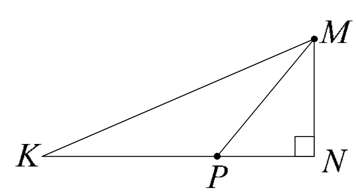
$$ab\cdot ab^2\cdot ...\cdot ab^{10} = a^{10}b^{55} = (a^2b^{11})^5,$$

tai ieškomoji sandauga yra $3^5 = 243$.

Ats.: 243.

7. Taškas K yra už 60 metrų į vakarus nuo taško P. Katė tupi taške K, o pelė yra taške P. Apskaičiuokite, per kiek laiko katė pagautų pelę, jei, bėgdama 13 m/s greičiu, ji pasirinktų optimalų maršrutą, o pelė bėgtų nuo katės 7 m/s greičiu tiese PM, kuri su rytų kryptimi sudaro 60° kampą.

Sprendimas. Tegu M yra taškas, kuriame katė pagautų pelę. Iš trikampių KPM ir PMN (žr. pav.) pagal uždavinio sąlygą gauname: $KP = 60$, $KM = 13t$, $PM = 7t$, $PN = 7t\cos 60^\circ = 3{,}5t$, $MN = 7t\sin 60^\circ = 3{,}5\sqrt{3}\,t$; čia t – laikas, per kurį katė pagauna pelę. Pagal Pitagoro teoremą gauname:



$$KN^2 + NM^2 = KM^2 \Rightarrow (60 + 3{,}5t)^2 + (3{,}5\sqrt{3}\,t)^2 = (13t)^2 \Rightarrow 2t^2 - 7t - 60 = 0 \Rightarrow t = 7{,}5.$$

Ats.: 7,5 sek.

8. Raskite visų sveikųjų parametro *a* reikšmių, su kuriomis lygtis

$$x^3 - ax + a + 11 = 0$$

turi bent vieną natūralųjį sprendinį *x*, sumą.

Sprendimas. $x^3 - ax + a + 11 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{x^3 + 11}{x - 1} = \dfrac{(x^3 - 1) + 12}{x - 1} = x^2 + x + 1 + \dfrac{12}{x - 1}$.

Pagal uždavinio sąlygą ir *a*, ir *x* turi būti sveikieji skaičiai ($x > 1$), todėl $\dfrac{12}{x-1}$ turi būti sveikasis skaičius. Vadinasi, $x - 1 = 1, 2, 3, 4, 6, 12$, t. y. $x = 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

Su šiomis *x* reikšmėmis gaunamos tokios *a* reikšmės: 19 (kai $x = 2$ arba $x = 3$), 25, 34, 59, 184. Jų suma yra $19 + 25 + 34 + 59 + 184 = 321$.

Ats.: 321.

9. Keturių skirtingų natūraliųjų skaičių vidurkis lygus 8. Raskite galimai didžiausią iš jų.

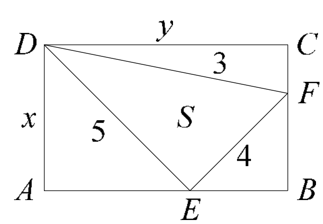
Sprendimas. Tegu *a*, *b*, *c* ir *d* yra skirtingi natūralieji skaičiai, kurių vidurkis lygus 8. Pagal vidurkio apibrėžimą $a + b + c + d = 32$.

Jei $a < b < c < d$, tai $d = 32 - (a + b + c)$.

Galimai mažiausia sumos $a + b + c$ reikšmė yra 6 (kai $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$). Todėl galimai didžiausia *d* reikšmė yra $32 - 6 = 26$.

Ats.: 26.

10. Stačiakampio *ABCD* kraštinėje *AB* pažymėtas taškas *E*, o kraštinėje *BC* – taškas *F* taip, kad trikampio *AED* plotas lygus 5, trikampio *BEF* plotas lygus 4, o trikampio *CFD* plotas lygus 3. Raskite trikampio *DEF* plotą.



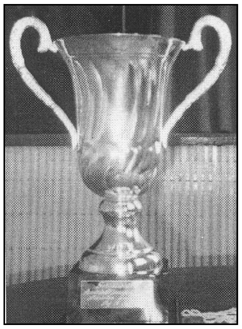
Sprendimas. Tegu $AD = BC = x$, $AB = CD = y$, o ieškomasis trikampio *DEF* plotas yra *S*. Tada $AE = \dfrac{10}{x}$, $EB = y - \dfrac{10}{x}$, $CF = \dfrac{6}{y}$, $FB = x - \dfrac{6}{y}$. Skaičiuodami ΔBEF plotą, gauname:

$$\left(y - \frac{10}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{6}{y}\right) = 8 \Rightarrow xy - 6 - 10 + \frac{60}{xy} = 8 \Rightarrow xy + \frac{60}{xy} = 24 \Rightarrow (xy)^2 - 24xy + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = 12 \pm \sqrt{84} \Rightarrow xy = 12 + \sqrt{84} = 12 + 2\sqrt{21}$$

(nes stačiakampio *ABCD* plotas didesnis už 12). Kadangi $xy = S + 12$, tai $S = 2\sqrt{21}$.

Ats.: $2\sqrt{21}$.



PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2010 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I Ų S P R E N D I M A I
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Raskite visus sveikuosius *n*, su kuriais $\frac{19n+17}{7n+11}$ yra sveikasis skaičius.

Sprendimas. Turime, kad
$$\frac{19n+17}{7n+11}=3-\frac{2n+16}{7n+11}.$$
Lengva įsitikinti, kad
$$0<\left|\frac{2n+16}{7n+11}\right|<1,$$
kai $n<-3$ arba $n>1$.

Šiais atvejais duotas sąlygoje skaičius nebus sveikasis. Lieka patikrinti atvejus, kai $n=-3,-2,-1,0,1$.

Ats.: $n=-3,-2,1$.

2. Raskite sandaugą
$$A_n=101\cdot 10001\cdot 100000001\cdot\ldots\cdot\underbrace{100...001}_{2^n-1\text{ nulių}}.$$

Sprendimas. Turime, kad
$$A=(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)...(10^{2^n}+1)=$$
$$=\frac{1}{10^2-1}\cdot(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)...(10^{2^n}+1)=$$
$$=\frac{1}{99}\cdot(10^4-1)(10^4+1)(10^8+1)...(10^{2^n}+1)=\frac{1}{99}(10^{2^{n+1}}-1)=$$
$$=\frac{1}{99}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2^{n+1}\ devynetai}=101010...101.$$

3. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį
$$1!+2!+\ldots+x!=y^2.$$

Sprendimas. Kai $x=1$, tai $y^2=1$; kai $x=3$, tai $y^2=9$. Turime tokius sprendinius:
$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=3,\\ y_4=-3.\end{cases}$$

Kai $x=2$, tai $1!+2!=3\neq y^2$, jei y sveikasis skaičius. Panašiai, kai $x=4$, tai $1!+2!+3!+4!=33\neq y^2$. Jei $x\geq 5$, tai
$$1!+2!+\ldots+x!=33+5!+6!+\ldots+x!=33+10N;$$
taigi gausime skaičių, kuris baigiasi 3, todėl nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Sprendimas. Pažymėkime $x + y = u,\ \ xy = v.$ Tada

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

Kadangi $u = b,$ tai

$$2v^2 - 4bv + b^4 = a,$$

o iš čia randame

$$v = b^2 \pm \sqrt{\frac{b^4 + a}{2}}.$$

Todėl

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{b^4 + a}{2}} - \frac{3b^2}{4}},\ \ y = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\sqrt{\frac{b^4 + a}{2}} - \frac{3b^2}{4}};$$

skaičiai *a* ir *b* turi tenkinti sąlygą: $a \ge \frac{b^4}{8}.$

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - \sqrt{yz} = 42, \\ y - \sqrt{zx} = 6, \\ z - \sqrt{xy} = -30. \end{cases}.$$

Sprendimas Kadangi $x = 42 + \sqrt{yz} > 0$ ir $y = 6 + \sqrt{zx} > 0,$ tai *z* taip pat turi būti teigiamas skaičius.

Pažymėję $a = \sqrt{x},\ b = \sqrt{y},\ c = \sqrt{z}$, turėsime tokią sistemą:

$$\begin{cases} a^2 - bc = 42, \\ b^2 - ac = 6, \\ c^2 - ab = -30. \end{cases}$$

Atėmę iš pirmos lygties antrąją lygtį, paskui trečiąją, o iš antros lygties trečiąją, gauname:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - bc + ac = 36, \\ a^2 - c^2 - bc + ab = 72, \\ b^2 - c^2 - ac + ab = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b+c) = 36, \\ (a-c)(a+b+c) = 72, \\ (b-c)(a+b+c) = 36. \end{cases}$$

Matome, kad $a - b = b - c;$ todėl $a = 2b - c$ ir $a + b + c = 3b.$

Įrašę į sistemą, gauname:

$$(b-c)b = 12 \Rightarrow c = b - \frac{12}{b}.$$

Todėl

$$a = 2b - c = 2b - \left(b - \frac{12}{b}\right) = b + \frac{12}{b}.$$

Tada

$$a^2 - bc = 42 \Rightarrow \left(b + \frac{12}{b}\right)^2 - b\left(b - \frac{12}{b}\right)^2 = 42 \Rightarrow b^2 + 24 + \frac{144}{b^2} - b^2 + 12 = 42 \Rightarrow \frac{144}{b^2} = 6 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6},\ a = 2\sqrt{6} + \dfrac{12}{2\sqrt{6}} = \dfrac{18}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6},$

$$c = 2\sqrt{6} - \frac{12}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Vadinasi, $x = 54,\ y = 24,\ z = 6.$

Ats.: $x = 54,\ y = 24,\ z = 6.$

6. Neneigiami sveikieji skaičiai *a*, *b* ir *c* tenkina lygtį

$$3 \cdot 10^a + 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c = 5073.$$

Raskite sumą $a + b + c$.

Sprendimas. Lengva įsitikinti, kad galimas toks skaičių trejetas: $a = 0,\ b = 3,\ c = 1;$ tada $a + b + c = 4.$

Reikia išsiaiškinti, ar galimi kitokie skaičių *a*, *b* ir *c* trejetai.

Jei $a \neq 0,$ tai skaičiaus $3 \cdot 10^a + 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c$ dalybos iš 10 galimos liekanos būtų 0, 2, 5 ir 7, o skaičiaus 5073 dalybos iš 10 liekana yra 3. Vadinasi, $a = 0$ ir

$3 \cdot 10^a + 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c = 5073 \Rightarrow 3 + 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c = 5073 \Rightarrow 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c = 5070 \Rightarrow$
$\Rightarrow b > 0$ ir $c > 0.$

O tada $5 \cdot 10^{b-1} + 7 \cdot 10^{c-1} = 507 \Rightarrow c = 1,$ nes skaičiaus 507 dalybos iš 10 liekana yra 7.

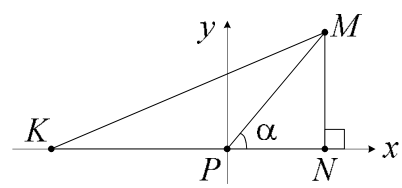
Iš lygybės $5 \cdot 10^{b-1} + 7 = 507$ gauname: $5 \cdot 10^{b-1} = 500 \Rightarrow 10^{b-1} = 10^2 \Rightarrow b = 3.$

*Ats.:*4.

7. Taškas *K* yra už 60 metrų į vakarus nuo taško *P*. Katė tupi taške *K*, o pelė yra taške *P*. Tegu *M* yra taškas, kuriame katė pagautų pelę, jei bėgdama 13 m/s greičiu, ji pasirinktų optimalų maršrutą, o pelė bėgtų nuo katės 7 m/s greičiu tiese *PM*, kuri su rytų kryptimi sudaro kampą α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$. Įrodykite, kad taškas *M* priklauso tam pačiam apskritimui nepriklausomai nuo kampo α didumo.

Sprendimas. Stačiakampę koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad taško *K* koordinatės būtų (–60; 0), o taško *P* koordinatės būtų (0; 0). Taško *M* koordinates pažymėkime $(x;\ y)$.

Nubrėžkime $MN \perp KP$. Tada pagal uždavinio sąlygą gauname:



$$KM = \sqrt{(60 + x)^2 + y^2} = 13t,$$

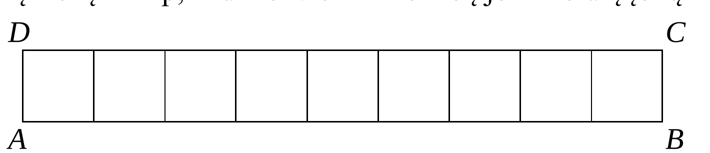
$$PM = \sqrt{x^2 + y^2} = 7t;$$

čia *t* – laikas, per kurį katė pagautų pelę. Vadinasi,

$$\frac{\sqrt{(60 + x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{13}{7} \Rightarrow \frac{(60 + x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{169}{49} \Rightarrow x^2 + y^2 - 49x - 1470 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{49}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{91}{2}\right)^2.$$

8. Devyni kvadratai sudaro stačiakampį *ABCD* (žr. pav.). Šių kvadratų kraštinėmis voras keliauja iš taško *A* į tašką *C* taip, kad kiekviena kraštinė į jo maršrutą įeitų nedaugiau kaip vieną kartą.



Nustatykite, kokio ilgio galimų maršrutų yra daugiausia ir kiek tokio ilgio maršrutų yra.

Sprendimas. Aišku, kad voro kelionės maršrute negali būti krypčių „←“.

Taip pat nesunku suprasti, kad kiekviename maršrute turi būti devynios kryptys „→“ ir bent viena kryptis „↑“. Be to, krypčių „↑“ turi būti viena daugiau negu krypčių „↓“. Taigi bendras krypčių „↑“ ir „↓“ skaičius yra nelyginis, t. y. $2n-1,\ n=1, 2, 3, 4, 5.$

Voro kelionės iš A į C maršruto ilgį galime užrašyti formule $9+(2n-1)=2n+8$, $n=1, 2, 3, 4, 5.$

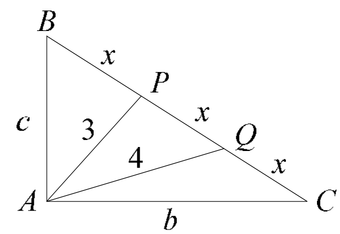
Maršrutų, kurių ilgis $9+(2n-1)$, bendras skaičius yra C_{10}^{2n-1}; $n=1, 2, 3, 4, 5.$

Apskaičiavę gauname: $C_{10}^{1}=10,\ C_{10}^{3}=120,\ C_{10}^{5}=252,\ C_{10}^{7}=120,\ C_{10}^{9}=10.$

Vadinasi, daugiausia yra maršrutų, kurių ilgis 14; jų skaičius yra 252.

Ats.: 14, 252.

9. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje BC taškai P ir Q pažymėti taip, kad galioja šios sąlygos: $BP=PQ=QC$, $AP=3$ ir $AQ=4$. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.



Sprendimas. Pagal kosinusų teoremą iš ΔABP gauname:

$$3^2=c^2+x^2-2cx\cos\angle B=c^2+x^2-2cx\cdot\frac{c}{3x}=$$
$$=c^2+x^2-\frac{2}{3}c^2=x^2+\frac{c^2}{3},$$

o iš ΔABQ gauname:

$$4^2=c^2+4x^2-2c\cdot 2x\cos\angle B=c^2+4x^2-4cx\cdot\frac{c}{3x}=c^2+4x^2-\frac{4}{3}c^2=4x^2-\frac{c^2}{3}.$$

Sudėję lygybes

$$9=x^2+\frac{c^2}{3}\ \text{ir}\ 16=4x^2-\frac{c^2}{3},$$

gausime:

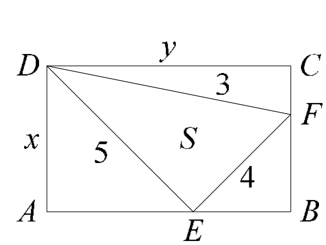
$$25=5x^2\Rightarrow x=\sqrt{5};$$
$$9=(\sqrt{5})^2+\frac{c^2}{3}\Rightarrow c=2\sqrt{3}.$$

Pagal Pitagoro teoremą

$$b=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{33}.$$

Ats.: $\sqrt{33},\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{5}.$

10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas E, o kraštinėje BC – taškas F taip, kad trikampio AED plotas lygus 5, trikampio BEF plotas lygus 4, o trikampio CFD plotas lygus 3. Raskite trikampio DEF plotą.:



Sprendimas. Tegu $AD=BC=x$, $AB=CD=y$, o ieškomasis trikampio DEF plotas yra S. Tada $AE=\dfrac{10}{x}$, $EB=y-\dfrac{10}{x}$, $CF=\dfrac{6}{y}$, $FB=x-\dfrac{6}{y}$. Skaičiuodami ΔBEF plotą, gauname:

$$\left(y-\frac{10}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{y}\right)=8\Rightarrow xy-6-10+\frac{60}{xy}=8\Rightarrow xy+\frac{60}{xy}=24\Rightarrow (xy)^2-24xy+60=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy=12\pm\sqrt{84}\Rightarrow xy=12+\sqrt{84}=12+2\sqrt{21}$$

(nes stačiakampio $ABCD$ plotas didesnis už 12). Kadangi $xy=S+12$, tai $S=2\sqrt{21}$.

Ats.: $2\sqrt{21}.$