PASVALIO KRAŠTO
15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2013 m. lapkričio 22d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad sveikieji skaičiai x ir y dalijasi iš 3, jei $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3.

Įrodymas. Tegu $x = 3a + r_1$ ir $y = 3b + r_2$; čia r_1 ir r_2 yra liekanos dalijant iš 3, kurių galimos reikšmės yra skaičiai 0, 1, –1.

Tada

$$x^2 + y^2 = 3(3a^2 + 3b^2 + 2ar_1 + 2br_2) + r_1^2 + r_2^2.$$

Jei $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3, tai ir $r_1^2 + r_2^2$ dalijasi iš 3. Vadinasi, $r_1^2 + r_2^2 = 0$. Todėl $r_1 = r_2 = 0$.

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right) < 3.$$

Įrodymas. Sandaugos dauginamuosius pertvarkykime taip:

$$1+\frac{2}{k^2+3k} = \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Vadinasi,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{2}}{\frac{n!(n+3)!}{6}} = 3\frac{n+1}{n+3} < 3$$

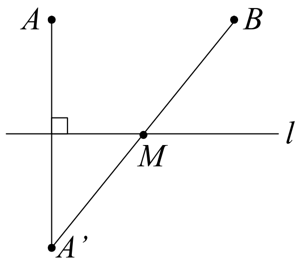
su visais natūraliaisiais n.

3. Tegu taškai A ir B yra vienoje tiesės l pusėje. Tiesėje l raskite tašką M tokį, kad atstumų suma $AM + MB$ būtų mažiausia.

Sprendimas. Tegu A' yra simetriškas atžvilgiu tiesės l taškui A. Akivaizdu, kad

$$AM + MB = A'M + MB,$$

o pastaroji suma bus mažiausia, kai M yra atkarpos $A'B$ susikirtimo su tiese l taškas.



4. Natūralieji skaičiai 1, 2, 3, ... iš eilės surašomi į begalinę lentelę (žr. pav.). Kiekvienam lentelės langeliui priskiriama skaičių pora $(m; n)$; čia m yra langelio pozicijos į dešinę numeris, o n – jo pozicijos į viršų numeris. Porą $(m; n)$ vadinkime langelyje parašyto skaičiaus koordinatėmis.

37	...	...	...	...	...	...
36	35	34	33	32	31	...
17	18	19	20	21	30	...
16	15	14	13	22	29	...
5	6	7	12	23	28	...
4	3	8	11	24	27	...
1	2	9	10	25	26	...

a) Imant kas antrą apatinės eilės langelį gaunama skaičių seka 1; 9; 25; ... Koks yra 100-asis tos sekos narys?

b) Koks skaičius yra langelyje (20; 20)?

c) Kokios langelio, kuriame yra skaičius 2013, koordinatės?

Sprendimas. a) Langeliuose, kurių koordinatės (1; 1), (3; 1), (5; 1), (7; 1). ..., $(2k-1; 1)$, ..., yra tokie skaičiai:

$$1=1^2,\ 9=3^2,\ 25=5^2,\ 49=7^2,\ \dots,\ (2k-1)^2, \dots .$$

Kadangi 100-asis sekos narys yra langelyje (199; 1), tai jis yra 199^2.

b) Langelyje (19; 1) yra skaičius $19^2=361$, o langelyje (20; 1) yra skaičius 362. Vadinai, langelyje (20; 20) yra skaičius $362+19=381$.

c) Kadangi $45^2=2025$, tai langelyje (45; 1) yra skaičius 2025. Kylant 45-uoju stulpeliu skaičiai mažėja (iki langelio (45; 45)). Taigi langelyje (45; 2) yra skaičius 2024, langelyje (45; 3) – skaičius 2023 ir t. t. Skaičius 2013 yra langelyje (45; 1+12) = (45; 13).

Ats.: a) $199^2=39601$; b) 381; c) (45; 13).

5. Kiek yra tokių keturženklių skaičių $\overline{x12y}$, kad sandauga $\overline{2xx}\cdot\overline{3y5}$ dalytųsi iš 12?

Sprendimas. Pažymėkime $a=\overline{2xx}\cdot\overline{3y5}$. Kadangi $\overline{2xx}=200+11x$, $\overline{3y5}=305+10y=$ $=5(61+2y)$, tai

$$a=5(200+11x)(61+2y).$$

Skaičius $61+2y$ yra nelyginis, todėl skaičius $200+11x$ turi dalytis iš 4. Vadinasi, x reikšmės gali būti tik 4 arba 8. Todėl

$$a=5\cdot 244(61+2y)=5\cdot 4\cdot 61(61+2y)$$

arba

$$a=5\cdot 288(61+2y)=5\cdot 12\cdot 241(61+2y).$$

Pirmuoju atveju a dalijasi iš 12 tik tada, kai $61+2y$ dalijasi iš 3. Galimos y reikšmės yra 1, 4 ir 7.

Antruoju atveju a dalijasi iš 12, kai y yra bet kuris skaitmuo.

Taigi gauname $3+10=13$ keturženklių skaičių $\overline{x12y}$, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 13.

6. Skaičiaus 5632 ir natūraliojo skaičiaus x sandauga $5632x$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Raskite mažiausią x reikšmę.

Sprendimas. Kadangi $5632 = 2^9 \cdot 11$, tai $x = 2 \cdot 11 = 22.$ Tada

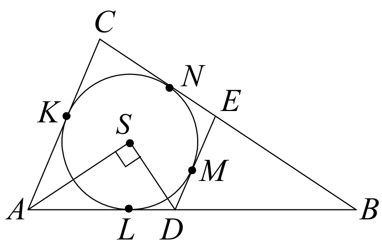
$$5632x = 2^{10} \cdot 11^2 = (2^5 \cdot 11)^2 = 352^2.$$

Ats.: 22.

7. Tegu S yra įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras, D – kraštinės AB vidurio taškas ir $\angle ASD = 90^\circ$. Įrodykite, kad $AB + BC = 3AC$.

Įrodymas. Nubrėžkime AS, DS ir liestinę DE. Apskritimo lietimosi su DE ir ΔABC kraštinėmis taškus pažymėkime M, N, K, L.

Kadangi $\angle ADE + \angle DAC = 2\angle ADS + 2\angle DAS = 2(\angle ADS + \angle DAS) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, tai $DE \parallel AC$.



Pagal sąlygą $AD = DB$. Todėl DE yra trikampio ABC vidurio linija; $DE = \dfrac{1}{2}AC$. Be to, $AB = 2AD$ ir $BC = 2CE$.

Pagal liestinės savybę

$$AL = AK,\ CK = CN,\ EN = EM,\ DL = DM.$$

Iš čia $AD + CE = AC + DE = \dfrac{3}{2}AC$. Vadinasi,

$$AB + BC = 2(AD + CE) = 3AC.$$

8. Natūralieji skaičiai x, y ir w tenkina lygybę

$$\frac{97}{19} = w + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}.$$

Apskaičiuokite sumą $x + y + w$.

Sprendimas. Lygybę pertvarkykime taip:

$$5 + \frac{2}{19} = w + \frac{y}{xy+1},$$

$$5 = w + \frac{y}{xy+1} - \frac{2}{19}.$$

Aišku, kad

$$0 < \frac{y}{xy+1} \le \frac{y}{y+1} < 1,$$

todėl turi galioti lygybė $\dfrac{y}{xy+1} = \dfrac{2}{19}$. Iš čia

$$\begin{cases} y = 2k, \\ xy + 1 = 19k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2k, \\ x = \dfrac{19k-1}{2k} = 9 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Vadinasi, $k = 1$, $x = 9$, $y = 2$, $w = 5$. Todėl $x + y + 10 = 9 + 2 + 5 = 16$.

Ats.: 16.

9. Du laivai (200 metrų ilgio ir 100 metrų ilgio) plaukia pastoviais, bet skirtingais greičiais. Plaukdami vienas prieš kitą, jie prasilenkia per 10 sekundžių. O kai abu plaukia ta pačia kryptimi, greitesnis laivas praplaukia pro lėtesnįjį per 25 sekundes. Koks greitesniojo laivo greitis?

Sprendimas. Tegu v_1 ir v_2 yra laivų greičiai (metrais per sekundę) ir $v_1 > v_2$. Pagal uždavinio sąlygą galioja dvi lygybės:

$$10v_1 = 300 - 10v_2 \text{ ir } 25v_1 = 300 + 25v_2.$$

Gauname sistemą:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 30, \\ v_1 - v_2 = 12. \end{cases}$$

Iš čia $v_1 = 21$.

Ats.: 21 m/s.

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 2, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $z \neq 0$, tai sistemą galima pertvarkyti taip:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Iš pirmųjų lygčių gauname, kad

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x}.$$

Įrašę į trečią lygtį, gauname:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4},$$

$$-\frac{2}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$x = \frac{24}{7}.$$

Belieka apskaičiuoti y ir z. Gausime $y = \dfrac{24}{5}$, $z = 24$.

Ats.: $\left(\dfrac{24}{7}; \dfrac{24}{5}; 24\right)$.

PASVALIO KRAŠTO 15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2013m. lapkričio 22d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI vyresniųjų klasių mokiniams

1. Duota n sveikųjų skaičių. Įrodykite, kad tarp jų atsiras keletas (arba, gali būti, vienas) skaičių, kurių suma dalijasi iš n.

Įrodymas. Tegu $a_1, a_2, \dots, a_n$ yra duotieji skaičiai. Sudarome sumas $a_1, a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Arba bent viena iš šių sumų dalijasi iš n, kuri būtų ieškomoji, arba nė viena iš jų nesidalija iš n. Pastaruoju atveju atsiras dvi sumos, kurių dalybos liekanos iš n yra lygios, nes sumų yra n, o nenulinių liekanų yra $n-1$. Tokių sumų skirtumas $(a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = a_{k+1} + \dots + a_m$ yra suma, dali iš n.

2. Raskite lygties $x^y + 1 = z$ pirminius sprendinius (pirminių skaičių x, y ir z trejetus, tenkinančius lygtį).

Sprendimas. Kadangi $x \ge 2$ ir $y \ge 2$, tai $z = x^y + 1 \ge 5$.

Skaičius $x^y + 1$ yra pirminis ir didesnis už 2. Todėl x^y yra lyginis, o kartu ir x yra lyginis. Vadinasi, $x = 2$. Jei būtų $y = 2k + 1$, tai

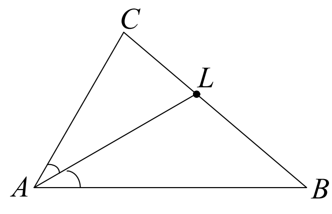
$$z = 2^{2k+1} + 1 = (2+1)(2^{2k} - 2^{2k-1} + \dots + 1)$$

būtų dalus iš 3. Vadinasi, y irgi yra lyginis; taigi $y = 2$. Iš čia $z = 5$.

Ats.: $x = y = 2, \ z = 5$.

3. Įrodykite, kad trikampio ABC kampo A pusiaukampinė dalija kraštinę BC santykiu $AB : AC$.

Įrodymas. Tegu L yra kampo A pusiaukampinės susikirtimo taškas su kraštine BC. Taško L atstumai iki kraštinių AB ir AC yra lygūs: juos pažymėkime h. Tegu h_A yra trikampio ABC aukštinės iš viršūnės A ilgis. Tada trikampių plotai yra:



$$S_{ABL} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot BL \quad \text{ir} \quad S_{ACL} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot CL.$$

Dalydami randame, kad $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BL}{CL}$.

4. Įrodykite, kad su bet kuriais nelygiais nuliui skaičiais x ir y

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \ge x^4 + y^4.$$

Įrodymas. Nagrinėdami kairės ir dešinės pusės skirtumą, gauname:

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{1}{x^2 y^2}(x^8 + y^8 - x^6 y^2 - x^2 y^6) = \frac{1}{x^2 y^2}(x^2 - y^2)(x^6 - y^6) \ge 0,$$

nes $x^2 - y^2$ ir $x^6 - y^6$ visada yra to paties ženklo.

5. Realiųjų skaičių a, b ir c trejetas tenkina lygybę

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1.$$

Įrodykite, kad $|abc|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Kada galioja lygybė?

Sprendimas. Padauginę lygybę iš sandaugos $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$, gauname lygybę

$$a^2(1+b^2)(1+c^2)+b^2(1+a^2)(1+c^2)+c^2(1+a^2)(1+b^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2).$$

Atlikę veiksmus, gauname lygybę

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2=1.$$

Toliau taikome aritmetinio vidurkio A_4 ir geometrinio vidurkio G_4 nelygybę $A_4\ge G_4$ ir gauname:

$$1=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2}{4}\cdot 4\ge 4\cdot\sqrt[4]{a^2b^2\cdot b^2c^2\cdot c^2a^2\cdot 2a^2b^2c^2}=4\cdot\sqrt[4]{2a^6b^6c^6},$$

$$4\cdot\sqrt[4]{2a^6b^6c^6}\le 1,$$

$$2a^6b^6c^6\le\frac{1}{256},$$

$$a^6b^6c^6\le\frac{1}{512}=\frac{1}{2^9},$$

$$|abc|\le\sqrt[6]{\frac{1}{2^9}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Lygybė $|abc|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ galima tik tada, kai

$$a^2b^2=b^2c^2=c^2a^2=2a^2b^2c^2=\frac{1}{4}.$$

Iš čia gauname:

$$|a|=|b|=|c|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ats.: $|a|=|b|=|c|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. Natūraliojo skaičiaus n dalybos iš 2009 ir iš 2010 liekana lygi 35. Kokia yra skaičiaus n dalybos iš 42 liekana?

Sprendimas. Pagal sąlygą yra tokie sveiki neneigiami skaičiai k ir l, kad

$$n=2009k+35$$

ir

$$n=2010l+35.$$

Skaičius 2009 dalijasi iš 7, o skaičius 2010 dalijasi iš 6. Vadinasi, skaičius $2009k=2010l$ dalijasi ir iš 7, ir iš 6; taigi dalijasi iš $6\cdot 7=42.$ Todėl skaičiaus n dalybos iš 42 liekana lygi 35.

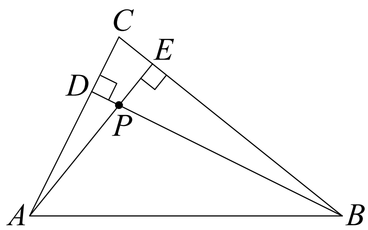
Ats.: 35.

7. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BD ir AE susikerta taške P. Įrodykite, kad

$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD.$$

Įrodymas. Pažymėkime: $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. Iš stačiųjų trikampių AEB ir ADB gauname: $AE = AB\sin\beta$, $BD = AB\sin\alpha$. Kadangi kampas $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAP = 90^\circ - \beta$, tai (iš $\Delta\, ABP$)

$$\angle APB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$$



Tada pagal sinusų teoremą

$$AP = AB \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} = AB \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ir

$$BP = AB \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = AB \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Todėl

$$AP \cdot AE + BP \cdot BD = AB \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot AB\sin\beta + AB \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot AB\sin\alpha =$$

$$= AB^2 \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2 \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2.$$

8. Tegu $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Raskite mažiausią natūralųjį skaičių x, didesnį už 2013, kad su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi m galiotų lygybė

$$T(x+1) - T(x) = T(m).$$

Įrodykite, kad jei $T(a) + T(b) = T(c)$ ir $a + b + c = T(28)$, tai $ab = 407(a + b - 203)$.

Įrodymas. Iš lygybės $T(x+1) - T(x) = T(m)$ gauname $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2} - \dfrac{x(x+1)}{2} = T(m)$,

$$x + 1 = T(m) \ge 2015.$$

$$T(62) = 1957 < 2015,\ T(63) = 2016 > 2015,$$

tai $x + 1 = 2016 \Rightarrow x = 2015$. Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} T(a) + T(b) = T(c), \\ a + b + c = T(28), \end{cases}$$

gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{a(a+1)}{2} + \dfrac{b(b+1)}{2} = \dfrac{c(c+1)}{2}, \\ a + b + c = \dfrac{28 \cdot 29}{2} = 406 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = c(c+1), \\ c = 406 - a - b. \end{cases}$$

Iš čia:

$$a^2 + b^2 + a + b = (406 - a - b)(407 - a - b),$$

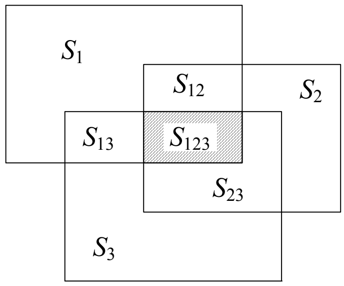
$$a^2 + b^2 + a + b = 406 \cdot 407 - 813a - 813b + 2ab + a^2 + b^2,$$

$$2ab = 814a - 814b - 406 \cdot 407,$$

$$ab = 407(a + b - 203).$$

9. Trijų kilimų bendras plotas lygus 200 m^2. Paklojus ant grindų, jie uždengė 140 m^2. Lygiai 24 m^2 plotas buvo uždengtas dviem sluoksniais. Koks grindų plotas uždengtas trimis sluoksniais?

Sprendimas. Kilimų plotus pažymėkime S_1, S_2 ir S_3. Dviem sluoksniais uždengtų grindų dalių plotus pažymėkime S_{12}, S_{13} ir S_{23}, o ieškomąjį plotą pažymėkime S_{123}. Pagal uždavinio sąlygą



$$S_1 + S_2 + S_3 = 200,\ \ S_{12} + S_{13} + S_{23} = 24$$

ir

$$(S_1 + S_2 + S_3) - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) - 2S_{123} = 140.$$

Ats.: 18 m^2.

10. Prie to paties kelio taškuose A_1, A_2, ... , A_n stovi po vieną žmogų. Kuriame kelio taške jie turėtų susitikti, kad atstumų, kuriuos reikia kiekvienam iš jų nueiti iki susitikimo vietos, bendra suma būtų pati mažiausia? Išnagrinėkite du atvejus:

a) $n = 12$; b) $n = 21$.

Sprendimas. Tarkime, kad taškai A_1, A_2, ... , A_n prie kelio išsidėstę ta tvarka, kaip parašyta. Juos suporuokime taip: A_1 ir A_n, A_2 ir A_{n-1}, A_3 ir A_{n-2} ir t. t. Jei n būtų nelyginis skaičius, tai vidurinis taškas liktų vienas.

Nesunku suprasti, kad žmonių, esančių taškuose A_1 ir A_n, atžvilgiu susitikimo vieta galėtų būti bet kuriame taške M tarp A_1 ir A_n.

Analogiškai žmonių, esančių taškuose A_2 ir A_{n-1} atžvilgiu, susitikimo vieta galėtų būti bet kuris taškas M tarp A_2 ir A_{n-1}. Ir t. t.

Taip samprotaudami įsitikiname, kad visų žmonių susitikimo vieta priklauso nuo to, ar n yra lyginis skaičius, ar nelyginis. Jei $n = 2m$, tai susitikimo vieta galėtų būti bet kuris taškas tarp A_m ir A_{m+1}. Atveju $n = 2m - 1$ susitikimo vieta turėtų būti vidurinis taškas A_m.

Ats.: kai $n = 12$, tai turėtų susitikti bet kuriame taške tarp A_6 ir A_7 (tinka ir taškai A_6 bei A_7); kai $n = 21$, tai turėtų susitikti taške A_{11}.