



PASVALIO KRAŠTO
16-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2014m. lapkričio 21d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

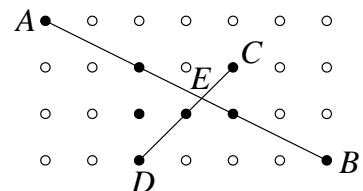
1. Klasėje yra 20 mokinių. Bet kurie du iš jų turi bendrą senelį. Įrodykite, kad ne mažiau kaip 14 klasės mokinių yra to paties senelio anūakai.
2. N -jų metų 300-ji diena ir $(N+1)$ -jų metų 200-ji diena buvo antradienis. Kokia buvo $(N-1)$ -jų metų 100-ji diena?

3. Raskite sandaugą

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2014^2}\right).$$

4. Iš keturių skaičių sudaromos visos įmanomos poros ir apskaičiuojamos porų sumos. Ar gali būti, kad tos sumos yra 1, 2, 3, 4, 5 ir 7?
5. Lentoje surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2014. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du skaičius ir užrašyti jų skirtumą (iš didesnio atėmus mažesni). Įrodykite, kad jeigu pačioje pabaigoje liko nulis, tai buvo padaryta klaida.
6. Skaičiai 1, 2, 3, ..., 25 surašomi į 5×5 lentelę. Kiekvienoje eilutėje skaičiai rašomi didėjimo tvarka. Kokia gali būti mažiausia ir didžiausia trečio stulpelio skaičių suma?
7. Raskite visas natūraliųjų skaičių, kurių sandauga yra 10 kartų didesnė už jų sumą, poras.
8. Taisyklingojo devynkampio viršūnėse užrašomi skaičiai 1, 2, ..., 9. Prie kiekvienos įstrižainės užrašoma jos galuose esančių skaičių sandauga. Ar įmanoma taip išdėstyti tuos skaičius, kad visi skaičiai prie įstrižainių būtų skirtingi?

9. Diagramoje pavaizduoti 28 gardelės taškai. Atstumas tarp artimiausių taškų lygus 1. Atkarpa AB susikerta su atkarpa CD taške E . Raskite atkarpos AE ilgį.



10. Atstumai tarp gretimų tos pačios plokštumos lygiagrečių tiesių yra 1, 3 ir 2. Ar įmanoma rasti po vieną kiekvienos tiesės tašką, kad jie būtų lygiagretainio viršūnės?



PASVALIO KRAŠTO
16-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2014m. lapkričio 21d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Natūralusis skaičius n yra „gražus“, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius m , turintis lygiai keturis daliklius (įskaitant 1 ir m), kurių suma lygi n . Kiek „gražių“ skaičių yra aibėje $\{2010; 2011; \dots; 2019\}$?
2. Ar įmanoma skaičius 1, 2, 3, ..., 2000 suskirstyti į poras taip, kad kiekvienos poros skaičių skirtumas dalytųsi iš 3?
3. 25 mokiniai rašo kontrolinį darbą salėje, kurioje 25 stalai sustatyti į 5 eiles po 5 stalus (žr. pav.). Tarpai tarp gretimų eilių ir gretimų stalų yra vienodi. Kaip reikia išdalyti penkis kontrolinio darbo variantus, kad mažiausias atstumas tarp mokinių, rašančių tą patį variantą, būtų didžiausias?
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
4. 21 natūraliojo skaičiaus suma lygi 3000. Įrodykite, kad tuos skaičius galima suskirstyti į 7 trejetus taip, kad kiekvieno trejeto skaičių suma dalytųsi iš 3.
5. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurios tenkina lygtį
$$3xy - 2x - 5y + 1 = 0.$$
6. Nustatykite kokią plokštumos kreivę stačiakampėje Dekarto koordinatinių sistemoje sudaro taškai $(x; y)$, kai $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, o t įgyja visas realiąsias reikšmes.
7. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^5 = y + y^5, \\ y^5 = z + z^5, \\ z^5 = t + t^5, \\ t^5 = x + x^5. \end{cases}$$
8. Raskite nors vieną natūraliųjų skaičių x , y ir z , didesnių už 100, trejetą, tenkinantį lygybę
$$x^2 + y^3 = z^2.$$
9. Ar įmanoma sudaryti lygiakraštį trikampį iš trijų trikampių, kurių kraštinių ilgiai 3, 5, 7 ir vieno lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis 2?
10. Erdvinio šešiakampio viršūnės nėra vienoje plokštumoje, o jo priešingos kraštinės yra tarpusavyje lygiagrečios. Įrodykite, kad priešingos šešiakampio kraštinės yra vienodo ilgio.