PASVALIO KRAŠTO
17-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2015 m. lapkričio 27 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Suskaičiuokite, kiek yra natūraliųjų skaičių kvadratų tarp skaičių 4^9 ir 9^4.

Sprendimas. Kadangi

$$\sqrt{4^9}=2^9=512 \text{ ir } \sqrt{9^4}=9^2=81,$$

tai skaičių 82, 83, ... , 511 kvadratai yra tarp 4^9 ir 9^4. Iš viso yra $511-81=430$ skaičių.

Ats.: 430.

2. Dabar Ona turi 4 kartus daugiau metų negu Petras turėjo tuo metu, kai Onai buvo tiek metų, kiek Petrui yra dabar. Kai Petrui bus tiek metų kiek Onai yra dabar, jų amžių suma bus 95 metai. Kiek metų yra Onai ir Petrui?

Sprendimas. Tegu x yra Onos, o y – Petro metų skaičius dabar.

Pagal pirmą sąlygos dalį gauname lygtį

$$x=4(y-(x-y)),$$

o pagal antrą dalį – lygtį

$$x+(x+(x-y))=95.$$

Atlikę veiksmus, sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases}5x-8y=0,\\ 3x-y=95.\end{cases}$$

Spręsdami ją, gauname:

$$\begin{cases}x=\frac{8}{5}y,\\ 3\cdot\frac{8}{5}y-y=95\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{5}y,\\ \frac{19}{5}y=95\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{5}y,\\ y=25\end{cases}\Rightarrow x=40,\ y=25.$$

Ats.: Onai – 40 metų, Petrui – 25 metai.

3. Raskite natūraliųjų skaičių $2n+3$ ir $n+7$ didžiausią bendrą daliklį, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

Sprendimas. Tegu m yra skaičių $2n+3$ ir $n+7$ didžiausias bendras daliklis. Tada su kuriais nors natūraliaisiais skaičiais k ir l galioja lygybės $2n+3=k\cdot m$ ir $n+7=l\cdot m$. Iš jų gauname:

$$\begin{cases}n=lm-7,\\ 2(lm-7)+3=km\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=lm-7,\\ 2l-\frac{11}{m}=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=lm-7,\\ m\in\{1;11\}.\end{cases}$$

Matome, kad skaičių $2n+3$ ir $n+7$ didžiausias bendras daliklis gali būti tik 11 arba 1.

Iš lygybės $n=11l-7$ (l – natūralusis skaičius) matyti, kad galimos n reikšmės yra 4, 15, 26, 37, ... Kitaip sakant, 11 yra skaičių $2n+3$ ir $n+7$ didžiausias bendras daliklis tik kai $n=11l-7$, $l=1,2,3,\ldots$. Visais kitais atvejais skaičiai $2n+3$ ir $n+7$ yra tarpusavyje pirminiai.

Ats.: 11, kai $n=11l-7$; 1 – kitais atvejais.

4. Įrodykite, kad skaičius

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 4029 \cdot 4030$$

dalijasi iš 4031.

Įrodymas. Kadangi

$$2016 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 4028 \cdot 4029 \cdot 4030 = (4031-2015)(4031-2014) \cdot \ldots \cdot (4031-3)(4031-2)(4031-1) =$$

$$= 4031 \cdot k - 2015 \cdot 2014 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

tai $a = 4031k;$ čia k yra tam tikras natūralusis skaičius.

Vadinasi, skaičius a tikrai dalijasi iš 4031.

Kitas būdas. Kadangi $4031 = 29 \cdot 139,$ tai ir iš pirmo dėmens, ir iš antro dėmens galima iškelti ir 29, ir 139 (antrame dėmenyje yra dauginamieji 2900 ir2780), todėl skaičių a galima išreikšti pavidalu $a = 4031 \cdot k, k \in \boldsymbol{N}.$

5. Kiek yra triženklių natūraliųjų skaičių, kurių kvadratas baigiasi 21? Pateikite bent du tokių skaičių pavyzdžius.

Sprendimas. Bet kurį triženklį natūralųjį skaičių n galima užrašyti taip:

$$n = \overline{xyz} = 100x + 10y + z = 100x + (10y + z),$$

čia x, y ir z $(x \neq 0)$ yra skaitmenys.

Kadangi

$$n^2 = (100x + (10y + z))^2 = 10\,000x^2 + 200x(10y + z) + (10y + z)^2,$$

nesunku pamatyti, kad paskutinieji du skaičiaus n^2 skaitmenys yra tokie pat kaip ir skaičiaus

$$(10y + z)^2 = 100y^2 + 20yz + z^2.$$

Aišku, kad z gali būti tik 1 arba 9.

Jei $z = 1,$ tai $y = 1$ arba $y = 6.$ O jei $z = 9,$ tai $y = 3$ arba $y = 8$

Taigi tik skaičių $\overline{x11},$ $\overline{x61},$ $\overline{x39}$ ir $\overline{x89},$ $x = 1, 2, \ldots, 9,$ kvadratai baigiasi 21. Iš viso gauname 36 skaičius.

Ats.: 36; $\overline{x11},$ $\overline{x61},$ $\overline{x39}$ ir $\overline{x89},$ $x = 1, 2, \ldots, 9.$

6. Nudažytas kubas supjaustomas į vienodus kubelius. Ar gali nenudažytų kubelių skaičius būti lygus kubelių, kurių bent viena siena yra nudažyta, skaičiui?

Sprendimas. Kiekvieną kubo briauną padaliję į n $(n \geq 2)$ lygių dalių, gautume n^3 kubelių. Nenudažytų kubelių skaičius, aišku, lygus $(n-2)^3.$

Ieškant atsakymo į pateiktą klausimą reikia išsiaiškinti, ar yra bent vienas natūralusis skaičius n $(n \geq 2)$, kad galiotų lygybė

$$(n-2)^3 = n^3 - (n-2)^3.$$

Kai $n = 2,$ ši lygybė negalioja. O kai $n \geq 3,$ ji ekvivalenti lygybei

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)^3 = 2.$$

Iš čia gauname, kad $\dfrac{n}{n-2} = \sqrt[3]{2}.$

Kadangi $\sqrt[3]{2}$ yra iracionalusis skaičius, o $\dfrac{n}{n-2}$ – racionalusis, tai lygybė nėra galima.

Vadinasi, neįmanoma nudažyto kubo supjaustyti į vienodus kubelius taip, kad nenudažytų kubelių skaičius būtų lygus kubelių, turinčių bent vieną nudažytą sieną, skaičiui.

Ats.: negali.

7. Tarkime, kad realiųjų skaičių pora $(x; y)$ yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^3 + xy + y^2 = -1, \\ y^3 + 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

sprendinys. Įrodykite, kad $xy = 1$.

Įrodymas. Nesunku patikrinti, kad tarp sistemos sprendinių nėra porų $(0; y)$ ir $(x; 0)$.

Antrą lygtį padauginkime iš x ir atimkime iš pirmos lygties. Gausime lygtį

$$(x^3 + xy + y^2) - (xy^3 + 2xy + x^3) = -1,$$

o iš jos gausime:

$$y^2 - xy^3 - xy + 1 = 0,$$

$$y^2(1 - xy) + (1 - xy) = 0,$$

$$(1 - xy)(y^2 + 1) = 0.$$

Kadangi $y^2 + 1 > 0$, tai

$$1 - xy = 0 \Rightarrow xy = 1.$$

8. Padauginus 997 iš natūraliojo skaičiaus n, $n > 1$, gaunamas skaičius, kurio visi skaitmenys yra nelyginiai. Raskite mažiausią tokį skaičių n.

Sprendimas. Tegu n $(n > 1)$ yra pasirinktas natūralusis skaičius. Tada

$$997 \cdot n = (1000 - 3)n = 1000n - 3n = 1000(n - 1) + (1000 - 3n).$$

Remdamiesi šia sandaugos išraiška, išsiaiškinkime, ar gali būti $3n < 1000$. Jei galiotų nelygybė $3n < 1000$, tai ketvirtas nuo galo skaitmuo sutaptų su skaičiaus $n - 1$ vienetų skaitmeniu. Kadangi jis turi būti nelyginis, tai skaičius n turi būti lyginis. Bet tada sandaugos $997 \cdot n$ vienetų skaitmuo taip pat būtų lyginis. Vadinasi, $3n \geq 1000$.

Mažiausias nelygybę $3n \geq 1000$ tenkinantis natūralusis skaičius yra $n = 335$. Kadangi sandaugos $997 \cdot 335 = 333\,995$ skaitmenys yra nelyginiai, tai $n = 335$ yra ieškomasis skaičius.

Ats.: 335.

9. Jonas meta monetą. Jei atsiverčia herbas, Algis duoda jam dar vieną monetą, o jei atsiverčia skaičius, tai Jonas atiduoda Algiui dvi monetas. Iš pradžių Jonas turėjo 12 monetų, o po 30 metimų nė vienos nebeliko. Apskaičiuokite, kelis kartus atsivertė herbas.

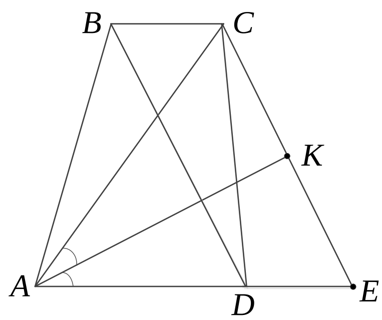
Sprendimas. Tegu x yra herbo atsivertimų skaičius. Tada $\dfrac{12 + x}{2}$ yra skaičiaus atsivertimų skaičius. Pagal uždavinio sąlygą, turi galioti lygybė

$$x + \frac{12 + x}{2} = 30.$$

Iš šios lygties gauname, kad $x = 16$.

Ats.: 16.

10. Trapecijos $ABCD$ įstrižainė AC lygi pagrindų AD ir BC sumai. Raskite kampą tarp įstrižainės BD ir kampo CAD pusiaukampinės.



Sprendimas. Nubrėžkime $CE \| BD$. Tuomet $BCED$ – lygiagretainis, $DE = BC$. Todėl $AE = AD + DE = AD + BC = AC$. Vadinasi, trikampis ACE yra lygiašonis. Jo pusiaukampinė AK yra statmena kraštinei CE, taigi ir tiesei BD.

Ats.: 90°.

PASVALIO KRAŠTO 17-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2015 m. lapkričio 27 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI vyresniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad lygtis

$$x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 = 0$$

neturi realiųjų sprendinių.

Įrodymas. Aišku, kad negali būti $x \le 0$ (kairėje pusėje gautume teigiamą skaičių).
Jei pasirinktume $0 < x < 1$, gautume:

$$(x^{10} > 0,\ x^2 - x^7 = x^2(1 - x^5) > 0,\ 1 - x > 0 \Rightarrow x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Jei būtų $x \ge 1$, tai gautume:

$$(x^{10} - x^7 \ge 0,\ x^2 - x + 1 > 0) \Rightarrow x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Taigi nėra nė vieno realiojo skaičiaus *x*, kuris galėtų tenkinti lygtį $x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 = 0.$

2. Įrodykite, kad realiųjų skaičių *a* ir *b* pora tenkina nelygybę

$$a^8 + b^8 \ge \frac{1}{128},$$

jei $a + b = 1.$

Įrodymas. Iš lygybės $a + b = 1$ gauname, kad $(a+b)^2 = 1.$ Tada

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 \ge 1 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \ge 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}.$$

Toliau:

$$(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 \ge \frac{1}{4} \Rightarrow a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8};$$

$$(a^4 + b^4)^2 + (a^4 - b^4)^2 \ge \frac{1}{64} \Rightarrow a^8 + b^8 \ge \frac{1}{128}.$$

3. Raskite visus natūraliuosius skaičius *n*, kuriems esant $5^n + 3^n$ dalijasi iš $5^{n-1} + 3^{n-1}.$

Sprendimas. Trupmeną $\dfrac{5^n + 3^n}{5^{n-1} + 3^{n-1}}$ pertvarkykime taip:

$$\frac{5^n + 3^n}{5^{n-1} + 3^{n-1}} = \frac{5 \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1}}{5^{n-1} + 3^{n-1}} = \frac{5(5^{n-1}+)3^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}}{5^{n-1} + 3^{n-1}} = 5 - \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^{n-1} + 3^{n-1}}.$$

Aišku, kad $\dfrac{3^{n-1}}{5^{n-1} + 3^{n-1}} < 1,$ kai *n* yra natūralusis skaičius. Vadinasi, dalijant $5^n + 3^n$ iš $5^{n-1} + 3^{n-1}$ sveikąjį skaičių galima gauti tik kai $\dfrac{3^{n-1}}{5^{n-1} + 3^{n-1}} = \dfrac{1}{2}.$ O iš čia gauname:

$$2 \cdot 3^{n-1} = 5^{n-1} + 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 5^{n-1} \Rightarrow n = 1.$$

Taigi $n = 1$ yra vienintelis skaičius, kuriam esant $5^n + 3^n$ dalijasi iš $5^{n-1} + 3^{n-1}.$

Ats.: $n = 1.$

4. Ar kvadratinio trinario ax^2+bx+c su sveikaisiais koeficientais a, b ir c $(a\neq 0)$ diskriminantas gali būti lygus 23?

Sprendimas. Pagal apibrėžimą, $D=b^2-4ac.$ Iš lygybės

$$b^2-4ac=23$$

matyti, kad b turėtų būti nelyginis sveikasis skaičius, nes

$$b^2=23+4ac.$$

Tegu $b=2n-1,$ n – sveikasis skaičius. Tada iš lygybės

$$(2n-1)^2=23+4ac$$

gauname:

$$4n^2-4n+1=23+4ac,$$

$$2(n^2-n)=11+2ac.$$

Kairėje pusėje gali būti nulis arba lyginis skaičius, o dešinėje – nelyginis skaičius.

Vadinasi, lygybė $D=23$ nėra galima.

Ats.: negali būti.

5. Įrodykite, kad jei p, $p-10$ ir $p+10$ yra pirminiai skaičiai, tai ir $p-2$ yra pirminis skaičius.

Įrodymas. Tarę, kad $p-2$ nėra pirminis skaičius, turėtume rasti tokius du natūraliuosius skaičius m ir n, didesnius už 1, kad galiotų lygybė $p-2=mn.$ Kadangi p yra pirminis skaičius, iš lygybės $p=mn+2$ darome išvadą, kad nei m, nei n negali būti lyginis skaičius.

Kadangi $p+10=mn+12$ yra pirminis skaičius, tai sandauga mn neturi dalytis iš 3.

Vadinasi, m ir n turi būti nelyginiai skaičiai, kuriuos galima užrašyti pavidalu $m=3k+r_1$, $n=3l+r_2$, $r_1, r_2\in\{1;2\}$. Tada

$$mn=(3k+r_1)(3l+r_2)=9kl+3(r_1l+r_2k)+r_1r_2.$$

Sandaugos $r_1\cdot r_2$ galimos reikšmės yra 1, 2 ir 4.

Jei būtų $r_1r_2=1$ arba $r_1r_2=4,$ tai $p=mn+2$ dalytųsi iš 3; taigi nebūtų pirminis skaičius.

Negalimas ir atvejis $r_1r_2=2,$ nes tada arba m, arba n būtų lyginis skaičius.

Atlikta analizė rodo, kad $p-2$ yra pirminis skaičius.

Kitas įrodymas. Vienas iš trijų skaičių $p-1$, p ir $p+1$, $p\geq 2$, dalijasi iš 3.

Kadangi $p-10=(p-1)-9$ ir $p+10=(p+1)+9$, tai skaičiai $p-10$, p ir $p+10$ yra pirminiai tik kai $p-10=3.$ Todėl $p=13,$ $p+10=23.$ Skaičius $p-2=11$ yra pirminis.

6. Raskite visus natūraliųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x;\,y;\,z)$, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz,\\ x^2=2(y+z). \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi $xyz>0$, tai iš pirmos lygties išplaukia, kad $x^3>y^3+z^3$, o tai reiškia, kad $x>y$ ir $x>z.$ Todėl

$$2x>y+z=\frac{x^2}{2}$$

(pastaroji lygybė gaunama iš antros lygties). Iš nelygybės $2x>\dfrac{x^2}{2}$ gauname:

$$4x-x^2>0\Rightarrow x(4-x)>0\Rightarrow x<4.$$

Iš antros lygties matyti, kad x turi būti lyginis skaičius. Vadinasi, $x = 2$. Kadangi $x > y$ ir $x > z$, tai $y = z = 1$.

Gauname vienintelį natūralųjį lygčių sistemos sprendinį (2; 1; 1).

Ats.: (2; 1; 1).

7. Išspręskite lygtį

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

Sprendimas. Tegu $(x^2 - x + 1)^2 = y$. Tada

$$y^2 - 10x^2 y + 9x^4 = 0 \Rightarrow y = 5x^2 \pm 4x^2 \Rightarrow y = 9x^2 \text{ arba } y = x^2.$$

Spręsdami lygtį $y = 9x^2$ gauname:

$$(x^2 - x + 1)^2 - 9x^2 = 0,$$

$$(x^2 - x + 1 - 3x)(x^2 - x + 1 + 3x) = 0,$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ arba } x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$(x - 2)^2 = 3 \text{ arba } (x + 2)^2 = 0,$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ arba } x = -1.$$

Toliau sprendžiame lygtį $y = x^2$:

$$(x^2 - x + 1)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - x + 1 - x)(x^2 - x + 1 + x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Taigi lygtis turi 4 sprendinius: ± 1, $2 \pm \sqrt{3}$.

Ats.: –1, 1, $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$.

8. Raskite lygties

$$[x^2] = [x]^2$$

(čia [...] skaičiaus sveikoji dalis) sprendinius, priklausančius intervalui [–5; 2).

Sprendimas. Intervale [–5; 0] funkcijos $y = x^2$ reikšmės mažėja, o intervale [0; 2) – didėja.

Remdamiesi skaičiaus sveikosios dalies apibrėžimu, gauname, kad jei $x \in [k; k + 1)$, $k \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$, tai $[x] = k$, $[x]^2 = k^2$, $x^2 \in ((k+1)^2; k^2]$. Vadinasi, $[x^2] = k^2 = [x]^2$ tik kai $x \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Jei $x \in [0; 1)$, tai $x^2 \in [0; 1)$ ir $[x] = [x^2] = 0$.

Jei $x \in [0; \sqrt{2})$, tai $x^2 \in [1; 2)$ ir $[x] = [x^2] = 1$.

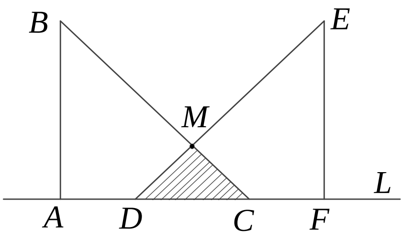
Jei $x \in [\sqrt{2}; 2)$, tai $x^2 \in [2; 4)$ ir $[x^2] > 1 = [x] = [x]^2$.

Vadinasi, lygties $[x^2] = [x]^2$ sprendinių (intervale [–5; 2)) aibė yra aibės {–5; –4; –3; –2; –1} ir intervalo $[0; \sqrt{2})$ sąjunga.

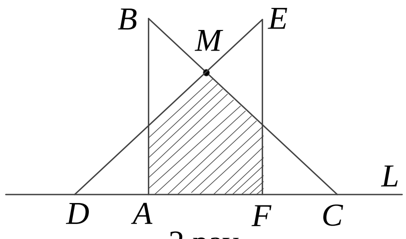
Ats.: $\{-5; -4; -3; -2; -1\} \cup [0; \sqrt{2})$.

9. Du statieji lygiašoniai trikampiai, kurių statinių ilgiai lygūs 1, yra vienoje plokštumoje. Viena pirmo ir antro trikampio statinių pora yra vienoje tiesėje L, o patys trikampiai yra simetriški kitos tiesės, statmenos tiesei L, atžvilgiu. Koks gali būti didžiausias abiejų trikampių bendros dalies plotas?

Sprendimas. Susikirsdami abu trikampiai gali sudaryti trikampį (žr. 1 pav.) arba penkiakampį (žr. 2 pav.)

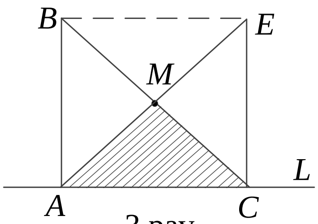


1 pav.

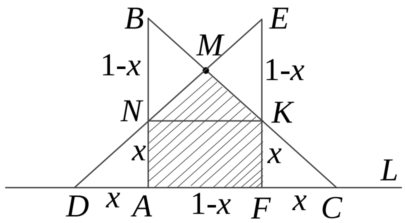


2 pav.

Pirmu atveju didžiausią reikšmę, lygią $\frac{1}{4}$, trikampio *DMC* plotas įgis, kai sutaps taškai *A* ir *D* bei *C* ir *F* (žr. 3 pav.).



3 pav.



4 pav.

Panagrinėkime antrą atvejį (žr. 4 pav.). Atkarpos *AD* ilgį pažymėkime *x*. Tada

$$S = S_{ANKF} + S_{NMK} = x(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2 = \frac{-3x^2 + 2x + 1}{4} =$$

$$= \frac{-3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{4}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{4}.$$

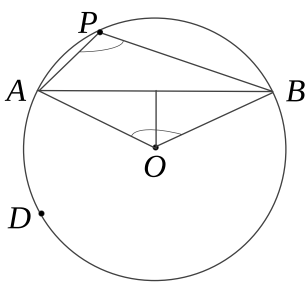
Aišku, kad didžiausią reikšmę plotas *S* gali įgyti atveju, kai $x = \frac{1}{3}$; tada $S = \frac{1}{3}$.

Vadinasi, didžiausia abiejų trikampių bendros dalies ploto reikšmė gali būti $\frac{1}{3}$.

Ats.: $\frac{1}{3}$.

10. Apskritimo spindulys lygus 1, jo centras taškas *O*. Apskritime yra pažymėtas taškas *P* ir nubrėžta styga *AB* tokia, kad $\angle APB = \angle AOB.$ Raskite stygos *AB* ilgį.

Sprendimas. Tarkime, kad *D* yra apskritimo lanko *AB*, kuriame nėra taško *P*, bet kuris taškas. Tuomet $\angle APB = \frac{1}{2} \cup ADB,$ $\angle AOB = \cup APB.$ Kadangi $\angle APB = \angle AOB,$ tai $\frac{1}{2} \cup ADB = \cup APB.$ Bet $\cup APB + \cup ADB = 360^\circ,$ todėl $\frac{1}{2} \cup ADB + \cup ADB = 360^\circ,$ o iš čia $\cup ADB = 240^\circ.$ Vadinasi, $\cup APB = 120^\circ,$ $\angle AOB = 120^\circ,$ $AB = 2 \cdot AO \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$



Ats.: $\sqrt{3}.$