DEŠIMTOJI KALĖDINĖ JUBILIEJINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2009-12-16
UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Visi Viduklės skautai labai drąsiai ėmėsi spręsti rebusą

$$\mathbf{AŠ \cdot TU = BBRR,}$$

kur, kaip visada, skirtingos raidės reiškia skirtingus, o vienodos raidės – vienodus skaitmenis. Po savaitės skautų vadas Donatas padavė mokytojai Salomėjai lapelį, kuriame buvo užrašytas visų galimų skirtingų to rebuso sprendinių skaičius.

Tame lapelyje buvo parašytas skaičius

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 0, nes tas rebusas sprendinių neturi

Sprendimas. Kadangi

$$\mathbf{BBRR = B0R \cdot 11,}$$

tai

$$\mathbf{AŠ \cdot TU}$$

dalijasi iš **11**.

Kadangi 11 yra pirminis skaičius, tai tada būtinai arba

$$\mathbf{AŠ,}$$

arba

$$\mathbf{TU}$$

dalijamės iš **11.**

Bet, deja, nei **AŠ**, nei net **TU** dalintis iš **11** negalime, nes mudu dviženkliai ir mudviejų skaitmenys skirtingi.

Taip dūžta viltys ir todėl renkamės atsakymą (E), nes rebusas sprendinių neturi.

2. Magdutė su savo draugais iš Gelgaudiškio sėdi prie Vytėnų pilies ir tikisi nesunkiai išspręsti skaitinį rebusą

$$\mathbf{MES \cdot JIE = OOOOOO,}$$

kur, suprantama, skirtingos raidės vėl žymi skirtingus, o vienodos raidės – vienodus skaitmenis. Atsakyme jie visi džiūgaudami užrašė pačią mažiausią įmanomą I reikšmę.

Tas skaičius I yra

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) rebusas neturi sprendinių

Sprendimas. Kadangi

$$\mathbf{273 \cdot 407 = 111\ 111}$$

tai

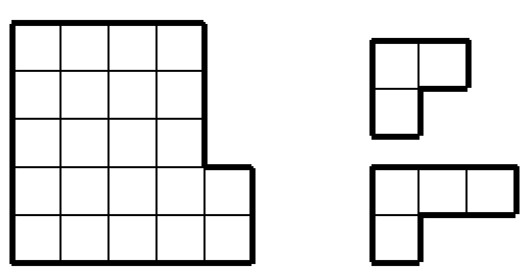
$$\mathbf{I = 0,}$$

nes mažesnis jis būti negali ir todėl renkamės atsakymą (A).

3. Pats drąsiausias Šimkaičių penktokas Šarūnas Šimkus nuvažiavęs į Šaukotą drąsiai ėmėsi karpyti brėžinyje pavaizduotą figūrą į dvejopus – vienokius iš 3 ir kitokius iš 4 langelių susidedančius "kampaičius". Kiek mažiausiai „kampaičių", susidedančių iš 3 vienetinių langelių jis gali gauti taip karpydamas, jei jis į "kampaičius" jis sukarpo visą figūrą?

(A) taip sukarpyti neįmanoma (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

Sprendimas. Žiūrime nuosekliai iš eilės.



1. Jei visai nebūtų 3-langių kampaičių. Tada nebūtų ir pilno sukarpymo kampaičiais, nes tada visi 22 langeliai atitektų 4-langiams kampaičiams ir todėl „sveikai nesusipjaustytų“.

2. Jei būtų 1 trilangis kampaitis. Tada likę

$$22 - 3 = 19$$

langelių atitenktų 4-langiams kampaičiams ir vėl „sveikai nesusipjaustytų“.

3. Jei būtų 2 trilangiai kampaičiai. Tada likę

$$22 - 3 \cdot 2 = 16$$

langelių atitektų 4-langiams kampaičiams. Dabar jau 16 langelių į 4-langes dalis susipjaustyti gali. Beliko parodyti pavyzdį. Jį pateikiame dar žemiau. Jame visi langeliai, kurie kerpant pakliūva į tą patį gabaliuką, ir žymimi vienodomis raidėmis.

A	A	B	C	
A	B	B	C	
D	D	C	C	
D	E	F	F	F
D	E	E	E	F

Todėl renkamės atsakymą (C).

4. Imdama visus iš eilės dviženklius skaičius Magdutė Auksė iš kiekvieno dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmens atima jo vienetų skaitmenį; pavyzdžiui, paėmusi 34 ji gauna 3 – 4 = – 1.

Kokia yra visų tokių Magdutės Auksės skirtumų suma?

(A) 0 (B) 25 (C) 45 (D) 55 (E) 100

Sprendimas.

10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**
60	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**
70	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
80	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**
90	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**

Magdutė Auksė imdamasi skaičiavimų visus lentelėje esančius $9 \cdot 10 = 90$ dviženklių skaičių suskirstė į tris rūšis:

1 rūšį sudarė visi skaičiai su sutampančiais skaitmenimis, arba

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Lentelėje jie yra aukščiau vadinamosios pagrindinės įstrižainės, kurią sudaro skaičiai

10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 ir 98.

Mes visai nesistebime, kodėl jie Magdutei Auksei yra pirmarūšiai – jų visų skirtumai lygūs nuliui – arba patys mieliausi.

2 rūšį Magdutei kažkodėl sudaro pirmasis kairiausias stulpelis su skaičiais

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ir 90.

Dabar Magdutės Auksės skaičiuojamų skirtumų suma yra

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Visus likusius skaičius Magdutė Auksė paskelbė trečiarūšiais. Visi trečiarūšiai skaičiai skirstomi į poras, kurios gaunamos bet kuriame trečiarūšiame skaičiuje perstatant jo skaitmenis. Poravimo prasmė visai aiški ir skaidri, nes bet kurios poros skirtumų suma yra lygi 0. Todėl nuliui yra lygi ir visų trečiarūšių skaičių skirtumų suma – taip baigėsi ir su pirmarūšiais skaičiais.

Vadinasi visų antrarūšių skaičių skirtumų suma

$$45$$

bus ir viso uždavimo atsakymas, todėl rinksimės atsakymą (C).

5. Visus skaičius nuo 1 iki 30 sumanūs ariogaliečiai suskirstė į 10 trejetų po tris skaičius kiekviename trejete. Po to iš kiekvieno tokio trejeto jie paėmė jo vidurinį pagal didumą skaičių ir visus vidurinius skaičius sudėjo. Kokią pačią didžiausią` sumą jie gali gauti sudėję visą dešimtį tų vidurinių skaičių?

(A) 100 (B) 176 (C) 190 (D) 200 (E) 222

Sprendimas.

Pats didžiausias iš visų įmanomų vidurinių skaičių yra tikrai ne didesnis už 29, sekantis antrasis – 27, trečiasis 25, ..., galiausiai paskutinis dešimtasis vidurinis skaičius yra tikrai ne didesnis už 21. Taip tikrai yra, nes prieš kiekvieną vidurinį skaičių yra dar vienas, viršesnis už jį.

Todėl visų dešimties pačių didžiausių įmanomų vidurinių tokių trejetų skaičių suma yra tikrai ne didesnė už

$$29 + 27 + 25 + 26 + 21 + 19 + 17 + 15 +13 + 11 =$$
$$(29 + 11) + (27 + 12) + (25 + 15) + (23 + 17) + (21 + 19) = 200.$$

Dabar gana į(si)tikinti, kad toks rinkinys yra sudaromas. Tai irgi tiesa, nes egzistuoja rinkinys

$$\{30, 29, 1\}, \{28, 27, 2\},\{26, 25, 3\}, \{24, 23, 4\}, \{22, 21, 5\}, \{20, 19, 6\}, \{18, 17, 7\}, \{16, 15, 8\}, \{14, 13, 9\}, \{12, 11, 10\}.$$

Todėl atsakymas yra 200 arba (D).

6. Besidomintys matematika Šimkaičių berniukai kartą per darbų pamoką pasidirbdino medinį kubą, kurio ilgis, skaičiuojant jį centimetrais, yra sveikasis skaičius, gerokai pranokstantis skaičių 2, ir visą to kubo išorę nudažė mėlynai. Dažams išdžiūvus berniukai įprastiniu būdu supjaustė jį į kubelius, kurių briaunos ilgis yra 1 cm. Tada mokinys Šimkus suskaičiavo visus kubelius su vienintele mėlyna sienele, o mokinys Dubinkus – visus kubelius su lygiai dviem mėlynomis sienelėmis. Visų nuostabai paaiškėjo, kad mokinio Šimkaus skaičius dešimteriopai pranoksta mokinio Dubinkaus sienelių skaičių. Raskite pradinio kubo briaunos ilgį.

(A) 12 (B) 16 (C) 17 (D) 22 (E) 15

Sprendimas.

Sprendimo pamatą sudaro paprasta pastaba, kad pagal sąlygą visi kubeliai su vienintele nudažyta siena bus kubeliai, kurie yra bet kurioje iš 6 pradinio kubo sienelių, bet "neprieina" iki jokios to kubo briaunos.

Lygiai taip pat kubeliai su tiksliai 2 dažytom sienelėm yra tie, kurie priklauso kubo briaunai, bet nėra kampiniai langeliai.

Dabar belieka paskaičiuoti.

Jeigu pradinio kubo briauna buvo

$$n$$

centimetrų ilgio, tai kiekvienoje briaunoje yra

$$n - 2$$

kubeliai su dviem dažytomis sienelėmis.

Kadangi kubas turi 12 briaunų, tai Dubinkaus skaičius yra

$$12\,(n - 2).$$

Kiekvienoje iš 6 kubo sienelių yra

$$n \times n$$

vienetinių kvadratėlių, iš kurių kiekvienoje sienoje bus lygiai

$$(n - 2) \times (n - 2) = (n - 2)^2$$

kubelių su 1 dažyta sienele, o per visas 6 sienas jų susidarys

$$6(n - 2)^2.$$

Pagal sąlygą

$$6(n - 2)^2 = 10 \cdot 12\,(n - 2),$$

arba

$$(n - 2)^2 = 20(n - 2).$$

Todėl

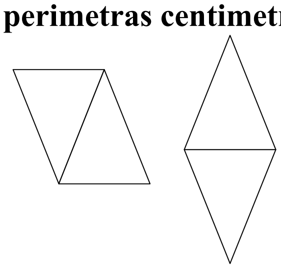
$$(n - 2) = 20,$$

arba

$$n = 22$$

ir renkamės atsakymą (D).

7. Vadžgiryje sumanūs vaikai vieną dieną iš dviejų vienodų lygiašonių trikampių sudėjo rombą, o kitą dieną iš tų pačių lygiašonių trikampių – dar kitokį lygiagretainį. Pirmosios dienos rombo perimetras yra 7 cm ilgesnis už vieno iš tų pradinių trikampių perimetrą, o antrosios dienos lygiagretainio – jau tik 3 cm ilgesnis už to paties pradinio trikampio perimetrą. Koks yra tas pradinio trikampio perimetras centimetrais?



(A) 12 **(B) 13** **(C) 14** **(D) 15** **(E) 10**

Sprendimas.

Sakykime, kad pradinio lygiašonio trikampio kraštinės yra s cm, t cm ir dar kartą t cm.Tada trikampio, rombo ir dar to kitokio lygiagretainio perimetrai atitinkamai yra

$$s + 2t,$$

$$4t$$

ir

$$2s + 2t$$

centimetrų.

Iš to, kas pasakyta, turime

$$2s + 2t = (s + 2t) + 3$$

ir

$$4t = (s + 2t) + 7.$$

Iš pirmosios lygybės

$$s = 3,$$

o iš antrosios

$$t = 5.$$

Todėl trikampio perimetras yra

$$3 + 5 + 5 = 13 \text{ (cm)}$$

Atsakymas. 13 cm

8. Penkiaženklis skaičius $\overline{A679B}$ yra garsus Ariogaloje tuo, kad jis dalijasi be liekanos iš 36. Ariogaliečiai domisi, kiek iš viso yra tokių penkiaženklių skaičių?.

(A) 0 **(B) 1** **(C) 2** **(D) 3** **(E) 7**

Sprendimas.

Tam, kad skaičius dalytųsi iš

$$36 = 4 \cdot 9,$$

būtina ir gana, kad jis dalytųsi iš

$$4$$

ir iš

$$9.$$

Tam, kad skaičius

$$\overline{A679B}$$

dalytųsi iš 4 būtina ir gana, kad skaičius, kurį sudaro 2 paskutinieji jo skaitmenys, arba

$$\mathbf{9B},$$

dalytųsi iš 4.

Vadinasi,

$$\mathbf{B = 2}$$

arba

$$\mathbf{B = 6.}$$

Todėl turime pasirūpinti skaičių **A6792** ir **A6796** dalumu iš 9.

Pirmuoju atveju skaitmenų suma

$$\mathbf{A + 6 + 7 + 9 + 2 = A + 24,}$$

o antruoju - skaitmenų suma

$$\mathbf{A + 6 + 7 + 9 + 6 = A + 28}$$

turi dalytis be liekanos iš 9.

Vadinasi, **A** gali būti 3 arba 8, todėl yra du tinkami skaičiai

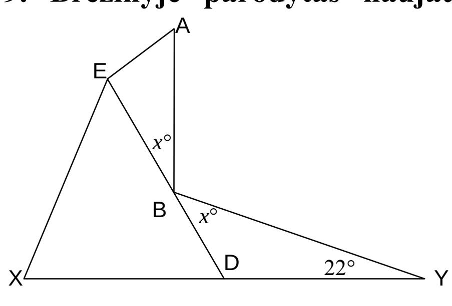
36792

ir

86796,

todėl renkamės atsakymą (C).

9. Brėžinyje parodytas naujausias projektinis brėžinys ant statomų naujųjų



Raseinių mokslo rūmų Geometrijos sienos.

Jame AB yra vertikali, o XY yra horizontali atkarpa.

Kam lygus kampas x, skaičiuojant laipsniais?

(A) 29 (B) 30 (C) 34 (D) 36 (E) 45

Sprendimas.

Pratęskime *AB* kol ji susikirs su *XY* taške *C*. Tada, kadangi *AB* yra stačia, o *XY* gulsčia, tai kampas

$$\angle ACY$$

yra status. Dabar

$$\angle CBD = \angle \mathrm{EBA} = x^{\mathrm{o}}$$

kaip kryžminiai kampai.

Todėl

$$\Delta CBY$$

$$22^{\mathrm{o}} + x^{\mathrm{o}} + x^{\mathrm{o}} = 90^{\mathrm{o}}$$

arba

$$2x^{\mathrm{o}} = 68 \text{ ir } x^{\mathrm{o}} = 34^{\mathrm{o}}.$$

Todėl teisingas atsakymas (C).

10. Tytuvėnuose per matematikos fakultatyvą vaikai pirmiausiai pakartojo dalumo iš 11 požymį: skaičius dalijasi iš 11, jeigu jo lyginėse vietose esančių skaitmenų sumos ir nelyginėse vietose esančių skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 11. Pavyzdžiui, skaičius 91762 dalijasi iš 11, nes skaičius

(9 + 7 + 2) – (1 + 6) dalijasi iš 11.

Po to jie labai stengėsi nustatyti ir tiksliai nustatė, kiek skaitmenų turi pats didžiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų suma yra 99, jo skaitmenų sandauga teigiama ir jis dalijasi be liekanos iš 99. Kiekgi skaitmenų jis turi?

(A) 33 (B) 66 (C) 88 (D) 89 (E) 99

Sprendimas.

Skaičiaus dalumas iš

$$99 = 9 \cdot 11$$

yra tas pats, kaip dalumas vienu metu iš

$$9$$

ir

$$11.$$

Nesunku patikrinti, kad ieškomas skaičius yra 89-ženklis ir atrodo taip:
913 11 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 111.

Po 913 eina 86 vienetai.

DEŠIMTOJI KALĖDINĖ JUBILIEJINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2009-12-16

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Pirmojo Raseinių dangoraižio, kuriame yra dvi laiptinės, bendrijos pirmininkas Bogušis daro rinkliavą naujiems daugiabučio namo butų numeriams įsigyti. Gyventojas Algis Masteika iš 100-tojo buto antroje laiptinėje tiesiai paklausė, kodėl toje laiptinėje reikia surinkti 40% daugiau pinigų, nors butų ir vienoje, ir kitoje laiptinėje yra vienodai. Pirmininkas Bogušis įtaigiai paaiškino, kad kiekvienas dviženklis buto numeris kainuoja dvigubai, o triženklis buto numeris – trigubai daugiau negu bet kuris vienaženklis buto numeris. Kiek butų yra tame pirmajame Raseinių dangoraižyje?

Sprendimas.

Iš sąlygos matome, kad tame name yra dvi laiptinės. Sakykime, kad kiekvienoje iš jų yra po k butų, tada visame name yra $2k$ butų.

Tada pirmoje laiptinėje yra 9 butai, kurių numeriai, yra patys pigiausi, nes vienaženkliai skaičiai. Sakykime, kad vienas vienaženklis buto numeris kainuoja

$$a$$

litų, tada pagal sąlygą dviženklis buto numeris kainuoja

$$2a,$$

o triženklis buto numeris –

$$3a$$

litų.

Tada visi k pirmosios laiptinės butų numeriai kainuoja

$$(k - 9) \cdot 2a + 9a$$

litų, o visi kitos, laiptinės, kur gyvena Petras Trupinys, butų numeriai kainuoja

$$(99 - k) \cdot 2a + (2k - 99) \cdot 3a$$

litų.

Iš sąlygos

$$((99 - k) \cdot 2a + (2k - 99) \cdot 3a) = 1{,}4((k - 9) \cdot 2a + 9a).$$

Suprastinę iš a gauname

$$((99 - k) \cdot 2 + (2k - 99) \cdot 3) = 1{,}4((k - 9) \cdot 2 + 9).$$

Toliau viskas aišku – padauginus abi puses iš 5 gautume

$$10(99 - k) + (2k - 99) \cdot 15 = 7((k - 9) \cdot 2 + 9),$$

$$990 - 10k + 30k - 1485 = 14k - 126 + 63,$$

$$20k - 495 = 14k - 63,$$

$$6k = 432,$$

$$k = 72.$$

Vadinasi, iš viso 2 laiptinių name yra

$$2k = 144$$

butai.

Atsakymas.

Name yra 144 butai.

2. Pagal naująjį administracinį padalinimą visas Raseinių kraštas buvo padalintas į 8 sritis. Kiekvienoje iš tų 8 sričių buvo numatyta pastatyti po rodyklę, rodančią į kiekvieną iš likusių 7 sričių, kurios plotas, skaičiuojant jį kvadratiniais kilometrais, neviršija srities, kurioje statoma rodyklė, ploto. Griežtai laikantis to plano turėjo būti pastatytos net 29 rodyklės. Sužinojusi tą skaičių įžvalgioji Raseinių Magdutė ėmė tyliai, bet ryžtingai visiems aiškinti, kad jeigu jau tikrai taip, tai tada kurių nors dviejų iš tų sričių plotai yra vienodi. Ar tikrai yra taip, kaip Magdutė sako? Atsakymą, suprantama, pagrįskite.

Sprendimas.

Jeigu visos 8 aštuonios Raseinių krašto naujojo administracinio padalinimo sritys būtų skirtingaplotės, tai į pačią mažiausią sritį būtų nukreiptos

7

rodyklės, į antrąją pagal mažumą

6

rodyklės ir taip toliau – į trečiąją pagal mažuimą 5, toliau 4, 3, 2, 1 ir galiausiai į pačią didžiausiąją sritį nekryptų jokia rodyklė.

Taigi iš viso rodyklių būtų

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

o pasakyta, kad jų yra 29.

Todėl tarp sričių turi būti lygiapločių.

Nesunku suvokti, kad viena rodyklė prisideda, kai tiksliai 2 kurios nors sritys yra lygiaplotės, o kokios jos tarp kitų, jei tik skirtingapločių – visiškai nesvarbu.

Atsakymas. Tikrai taip ir yra, kaip sako Raseinių Magdutė

3. Iš 4 auksinių monetų, toliau vadinamų auksiukėmis, sensacingai iškastų paryčiais Lyduvėnų pilkapyje, trys yra visiškai vienodos ir sveria vienodai, o ketvirtoji auksiukė yra netikra ir nors ji iš pažiūros niekuo nesiskiria nuo likusiųjų, tačiau jos svoris yra ne toks, koks yra likusių 3 tikrų auksiukių svoris. Kasinėtojai turi svarstykles, kuriomis galima iš karto nustatyti bendrą tikslų dviejų arba daugiau monetų svorį. Svėrinėti monetų po vieną negalima, nes svėrinėjamos po vieną jos kaip mat sudyla subyra. Tuojau pat atvykusi į kasinėjimo vietą Raseinių savivaldybės Gamtosaugos skyriaus inspektorė Magdutė Auksė ryžtingai mano, kad tokiomis sąlygomis garantuotai galima ne daugiau kaip 4 svėrimais nustatyti, ir kuri iš tų 4 monetų yra netikra, ir net ar ta vienintelė netikra moneta yra lengvesnė ar sunkesnė už likusias auksiukes.

Ar Magdutė Auksė yra teisi?

Sprendimas.

(Kur jau ten bus neteisi Magdutė Auksė)

Iš tikrųjų, jei jau negalima sverti monetų po vieną, tai sverkim dualiai „atbulai“: visas be vienos, arba visais galimais būdais po tris monetas.

I svėrimas – visos be pirmos auksiukės;

II svėrimas – visos be antros auksiukės;

III svėrimas – visos be trečios auksiukės;

IV svėrimas – visos be ketvirtos auksiukės.

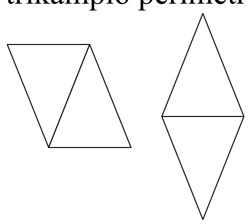
Visiškai aišku, kad trijų svėrimų rezultatų – tų, kur bus kartu su netikra auksiuke – rezultatai bus vienodi, o kažkurio likusiojo – skirtingi nuo tų trijų kitų.

Jeigu tas kitas likusysis svėrimas duos mažesnį svorį, tai netikra auksiukė sunkesnė, o jei didesnį svorį, tai ji – netikra auksiukė – yra lengvesnė už likusias tris tikrąsias auksiukes.

Ir visada aišku, kuri moneta yra netikriukė.

Atsakymas. Magdutė Auksė yra teisi, 4 svėrimų pakanka.

4. Vadžgiryje sumanūs vaikai vieną dieną iš dviejų vienodų lygiašonių trikampių sudėjo rombą, o kitą dieną iš tų pačių lygiašonių trikampių – dar kitokį lygiagretainį. Pirmosios dienos rombo perimetras yra 7 cm ilgesnis už vieno iš tų pradinių trikampių perimetrą, o antrosios dienos lygiagretainio – jau tik 3 cm ilgesnis už to paties pradinio trikampio perimetrą. Koks yra tas pradinio trikampio perimetras?



Sprendimas.

Sakykime, kad pradinio lygiašonio trikampio kraštinės yra s cm, t cm ir dar kartą t cm.Tada trikampio, rombo ir dar to kitokio lygiagretainio perimetrai atitinkamai yra

$$s + 2t,$$

$$4t$$

ir

$$2s + 2t$$

centimetrų.

Iš to, kas pasakyta, turime

$$2s + 2t = (s + 2t) + 3$$

ir

$$4t = (s + 2t) + 7.$$

Iš pirmosios lygybės

$$s = 3,$$

o iš antrosios

$$t = 5.$$

Todėl trikampio perimetras yra

$$3 + 5 + 5 = 13 \text{ (cm)}$$

Atsakymas. 13 cm

5. Vienas sumanus tėvas pačiame Raseinių centre gražiai augino 10 vaikų ir su jais kas savaitę ruošdavo sekmadienio pietus. Vieną sekmadienio rytą jis buvo staiga iškviestas į darbą, bet nuramino vaikus sakydamas, kad iki pietų jis spėsiąs pargrįžti. Kad pabaigę ruošti pietus vaikai nenuobodžiautų ir neliūdėtų, jis išdalino jiems marškinėlius su numeriais

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ir pasakė, kad jeigu jie vieni sugebės taip susėsti prie svetainėje stovinčio apskrito sekmadienio pietų stalo, kad bet kurių trijų greta sėdinčių brolių marškinėlių numerių suma bus

( ) ne didesnė už 15, tai jis kiekvienam broliui duos po 10 litų skatinamųjų pinigų;

( ) ne didesnė už 14, tai jis kiekvienam broliui duos jau po 20 litų skatinamųjų pinigų;

( ) ne didesnė už 13, tai jis kiekvienam vaikui duos net po 50 litų skatinamųjų pinigų.

(A) Ar įmanoma broliams gauti po 10 litų?

(B) Ar įmanoma broliams gauti po 20 litų?

(C) Ar įmanoma broliams gauti po 50 litų?

Sprendimas.

10 brolių su numeriais

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

tikrai gali susėsti taip, kad bet kurių 3 greta sėdinčių brolių numerių suma neprašoka 15. Pateikiame pavyzdį.

```
        0
    6       9
  8           4
  1           2
    3       7
        5
```

Todėl po 10 litų broliai uždirbti gali (pvz., jeigu susėstų taip, kaip ką tik buvo nurodyta).

Įrodysime, kad po 20 litų broliai uždirbti negali. Tam pakanka įrodyti, kad broliai negali susėsti taip, kad bet kurių trijų greta sėdinčių brolių numerių suma niekada neprašoka 14.

Tarkime, kad jie gali taip susėsti. Tada galime tarti, kad kaip praeitame pavyzdyje “aukščiausiai” sėdi brolis su numeriu 0. Tada likę 9 broliai gali būti suskirstyti į tris kaimyninių brolių trejetus po 3 brolius. Jeigu tų 3 trejetų suma numerių suma neprašoka 14, tai 9 nenulinių brolių numerių suma neprašoka

$$14 \cdot 3 = 42.$$

Bet 10 brolis yra su numeriu 0, vadinasi ir visų 10 brolių numerių suma neprašoktų 42, o ji juk yra

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Gautas prieštaravimas rodo, kad susėsti taip, kad išeitų po 20 litų, neįmanoma, vadinasi, juo labiau neįmanoma susėsti taip, kad ta suma būtų dar mažesnė.

Taigi ir uždirbti po 50 litų neįmanoma.

Atsakymas. (A) Taip (B) Ne (C) Ne