SPRENDIMAI
VIENUOLIKTOJI KALĖDINĖ JUBILIEJINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2010-12-15

1. Kiek yra skirtingų dviženklių skaičių *M* ir *N* porų (*M*, *N*), kad skaičius *N* prasideda devynetu, o pati sandauga $M \cdot N$ yra triženklis skaičius?

(*A*) 9 (*B*) 10 (*C*) 11 (*D*) 12 (*E*) 21

Sprendimas.

Kadangi skaičius

$$M$$

yra dviženklis, tai jo pirmasis skaitmuo negali būti lygus

$$0,$$

o tada jis turi būti būtent vienetas, nes

$$2,$$

kaip pirmasis to skaičiaus skaitmuo būtų per didelis, nes tada visa sandauga būtų jau

4-ženklis

skaičius.

Todėl skaičiaus *M* pirmasis skaitmuo yra būtent

$$1.$$

Jeigu dabar skaičiaus

$$M$$

antrasis skaitmuo būtų 0, tai tada "visas pirmasis skaičius *M*" būtų

$$10,$$

o tada antrasis skaitmuo

$$D$$

galėtų būti "devyniasdešimt bet kiek", arba

$$90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99,$$

nes visa sandauga vis tiek bus "dar triženklė" ir turėsime iš karto jau ištisų

$$10$$

rebuso sprendinių.

Jeigu skaičiaus

$$M$$

antrasis skaitmuo ne

$$0,$$

tai tada jis gal

$$1,$$

o tada skaičiaus

$$N$$

antrasis skaitmuo gali būti jau tik

$$0,$$

nes kitaip bus per daug, o dabar dar gerai, dar yra ne per daug, nes

$$11 \cdot 90 = 990.$$

Pastebėtina, kad

$$11 \cdot 91 = 1001,$$

o tai jau būtų per daug.

Taip susidaro 11 rebuso sprendinių:

$$10 \cdot 90 = 900,\ 10 \cdot 91 = 910,\ 10 \cdot 92 = 920,\ 10 \cdot 93 = 930,$$
$$10 \cdot 94 = 940,\ 10 \cdot 95 = 950,\ 10 \cdot 96 = 960,\ 10 \cdot 97 = 970,$$
$$10 \cdot 98 = 900,\ 10 \cdot 99 = 910,\ 11 \cdot 90 = 990$$

ir renkamės atsakymą

C.

2. Iš 4 dėmenų susidedančioje lygybėje

0, + 0,** + 0,** + 0,** = 1**

pakeisdama kiekvieną žvaigždutę skaitmeniu Magdutė su savo draugais iš Šimkaičių sugeba išsiversti vienais dvejetais ir trejetais ir gauna teisingą skaitinę lygybę.

Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti pats pirmasis iš 4 sumos dėmenų?

(*A*) 2 (*B*) 3 (*C*) 4 (*D*) 5 (*E*) 0, nes tokia lygybė neįmanoma

Sprendimas

Aritmetiniai tyrimai rodo, kad yra tik du tokie iš esmės skirtingi (kurie nesutampa, perstatinėk tu juos, gerasis žmogau, kaip bepanorėjęs) skaičių ketvertai:

$$0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}23 + 0{,}32 = 1$$

ir

$$0{,}22 + 0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}33 = 1.$$

Pasižiūrėjus į tą „aritmetiką“ pasidaro aišku, kad skaičiai

0, 32

ir

0,33

negali būti vienoje lygybėje.

Todėl matome, kad pats pirmasis iš keturių tos lygybės dėmenų gali būti

0,22,

0,23,

0,32

arba net ir

0,33.

Todėl pirmasis tos lygybės dėmuo gali įgyti

4

reikšmes ir todėl renkamės atsakymą

C.

3. Stačiakampis sklypas Vadžgiryje įprastu būdu dviem tarpusavyje statmenomis ir to pradinio stačiakampio kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis padalinamas į 4 stačiakampiukus. Trijų iš tų 4 susidariusių stačiakampiukų plotai yra 2, 8 ir 16. Ketvirtojo stačiakampiuko plotas yra irgi sveikasis skaičius. Kam gali būti lygi visų galimų ketvirtojo stačiakampiuko plotų suma?

(*A*) 40 (*B*) 56 (*C*) 64 (*D*) 69 (*E*) 72

Sprendimas

Pastebėkime, kad jeigu stačiakampis lygiagrečiomis jo kraštinėm tiesėmis yra padalytas į

4

stačiakampiukus

$$M, N, S, T$$

M	N
S	T

tai tų stačiakampiukų plotų sieja dėsnis:

„Įstrižai” esančių stačiakampiukų plotų sandaugos yra lygios“

„Pajutus“, kad taip yra, įrodyti tą jau visai nebesunku: susižymėkime viduje stačiakampiukų matmenis

$$u, v, p \text{ ir } q:$$

M u	q N v
S p	T

Tada sandauga

$$u \cdot v \cdot p \cdot q$$

vienaip grupuojant virsta

$$(u \cdot q) \cdot (v \cdot p),$$

o tai yra

$$M \cdot T,$$

o grupuojant sandaugą

$$u \cdot v \cdot p \cdot q$$

kitaip, arba

$$(u \cdot p) \cdot (v \cdot q),$$

ji “virsta” kitų dviejų „kryžmų“ plotų B ir C sandauga

$$N \cdot S.$$

Vadinasi, jos tikrai lygios.

Dabar tereikia pasižiūrėti kaip gali būti išsidėstę tie trys žinomo ploto stačiakampiukai ir kaip – pagal juos – tas ketvirtasis, kurio plotą pagal kiekvieną padėtį tuojau pat ir surandame.

Galimi trys iš esmės skirtingi atvejai

2	8
?	16

Tada turi būti

$$? \cdot 8 = 2 \cdot 16$$

ir

$$? = 4.$$

Kitas išsidėstymas gali būti toks:

?	**8**
2	**16**

Tada turi būti

$$? \cdot 16 = 2 \cdot 8$$

ir

$$? = 1.$$

Galiausiai padėtis gali būti dar ir tokia:

2	**16**
8	**?**

Tada, suprantama,

$$? \cdot 2 = 8 \cdot 16$$

ir

$$? = 64.$$

Daugiau jokių iš esmės naujų padėčių nėra, nes „pagal įstrižainę“ prieš nežinomą ketvirtąjį plotą jau „pabuvojo“ visi trys stačiakampiukai su plotais

8, 16 ir 2

atitinkamai.

Kadangi nežinomojo ketvirto stačiakampiuko plotas gali būti lygus

1, 4 arba 64,

todėl tų plotų suma

$$1 + 4 + 64 = 69$$

ir todėl renkamės teisingą atsakymą

***D*.**

4. Betygalos maironiečiai per matematikos pamoką susidūrė su tokiais keturiais iš eilės einančiais dviženkliais skaičiais, kurių sandauga kažkokiu stebuklingu būdu dalijasi be liekanos iš 999. Jie su įkvėpimu ėmė aiškintis, kokia galėtų būti pati mažiausia įmanoma tokių 4 iš eilės einančių skaičių suma?

(*A*) 100 (*B*) 125 (*C*) 150 (*D*) 190 (*E*) 192

Sprendimas

Kadangi

$$999 = 27 \cdot 37,$$

o

37

yra pirminis skaičius, tai viena įmanoma

4

iš eilės einančių skaičių grupė turės grupuotis apie skaičių

37.

Likę trys skaičiai turėtų užtikrinti sandaugos dalumą iš

27,

arba iš

$$3^3$$

Gerai, kad greta, visai čia pat yra dalus iš 9 skaičius

36,

o ir kitas iš trijų „skalus“ skaičius

39

irgi ne per toli.

Taip ir susidaro reikalinga keturių skaičių grupė

36, 37, 38 ir 39,

kurių sandauga

$$36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39$$

tikrai dalysis iš

999.

Tų skaičių suma

$$36 + 37 + 38 + 39$$

yra

150,

todėl rinksimės teisingą atsakymą

***C*.**

Pastaba.

Yra dar viena keturių dviženklių skaičių grupė, kuri ‘buriasi” apie kitą pirminio skaičiaus

37

kartotinį

74.

Tai keturių skaičių grupė

72, 73, 74 ir 75,

bet jų suma yra jau truputį didesnė.

Taip lieka atsakymas *C*.

5. Paėmę 4 skirtingus natūraliuosius skaičius *a*, *b*, *c* ir *d* ir labai tvarkingai dėliodami juos „kiekvieną su kiekvienu“ Raseinių Magdutės pusbroliai Teodoras su Adeodatu gavo tokias 16 sumų:

$$a + a,\ a + b,\ a + c,\ a + d,$$
$$b + a,\ b + b,\ b + c,\ b + d,$$
$$c + a,\ c + b,\ c + c,\ c + d,$$
$$d + a,\ d + b,\ d + c,\ d + d.$$

Po to jie įsivėlė į ilgiausias diskusijas, kiek daugiausiai iš tų užrašytųjų 16 sumų galėtų būti pirminiai skaičiai?

(*A*) 5 (*B*) 7 (*C*) 8 (*D*) 9 (*E*) 12

Sprendimas.

Panagrinėsime keletą atvejų.

Jeigu visi keturi skaičiai

$$a, b, c \text{ ir } d$$

lyginiai arba visi jie nelyginiai, tai "lentelėje" yra

$$16$$

lyginių skaičių.

Jei trys iš skaičių

$$a, b, c \text{ ir } d$$

yra lyginiai, o vienas nelyginis, arba, atvirkščiai, trys iš tų skaičių yra nelyginiai, o vienas lyginis, tai "lentelėje" yra

$$10$$

lyginių skaičių.

Jeigu du iš skaičių

$$a, b, c \text{ ir } d$$

yra lyginiai, o du nelyginiai, tai "lentelėje" yra

$$8$$

lyginiai skaičiai.

Vadinasi, bet kuriuo atveju "lentelėje" yra ne mažiau kaip 8 lyginiai skaičiai. Iš lyginių skaičių ne daugiau negu vienas gali būti pirminis skaičius

(kadangi $1 + 1 = 2$),

o didesni skaičiai jau yra sudėtiniai.

Todėl "lentelėje" yra ne mažiau kaip 7 sudėtiniai (ne pirminiai) skaičiai. Taigi "lentelėje" yra ne daugiau kaip 9 pirminiai skaičiai.

Belieka nurodyti atvejį su 9 pirminėmis sumomis: jis gaunamas, kai, pvz:

$$a = 1,$$
$$b = 2,$$
$$c = 3,$$
$$d = 4.$$

Tada lentelė

$$\begin{array}{l} a + a, a + b, a + c, a + d, \\ b + a, b + b, b + c, b + d, \\ c + a, c + b, c + c, c + d, \\ d + a, d + b, d + c, d + d. \end{array}$$

pasidaro tokia:

$$\begin{array}{l} 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4, \\ 2 + 1, 2 + 2, 2 + 3, 2 + 4, \\ 3 + 1, 3 + 2, 3 + 3, 3 + 4, \\ 4 + 1, 4 + 2, 4 + 3, 4 + 4, \end{array}$$

arba, jau visai paprastai rašant

$$\begin{array}{llll} 2, & 3, & 4, & 5, \\ 3, & 4 & 5, & 6, \\ 4, & 5, & 6, & 7, \end{array}$$

5, 6, 7, 8

su devyniais pirminėmis sumomis – 1 dvejetu, 2 trejetais, 4 penketais ir 2 septynetais – iš viso 9 pirminėmis sumomis – ir todėl renkamės atsakymą

***D*.**

6. Petras iš Ariogalos negali į rankas paimti jokios 1 ct monetos – jam jos regisi per lengvos. Užtat jis kasdien vis kitokiu būdu Centriniame Raseinbanko skyriuje išsiskeičia visą vieną litą 2 ir 5 centų monetomis taip kad visada būtų abiejų rūšių „baltų centų“. Kelias dienas jis sugaiš, kol iškeis tokiu būdu 1 litą visais galimais būdais kaskart vis panaudodamas abiejų rūšių „baltus centus“?

(*A*) 7 (*B*) 9 (*C*) 6 (*D*) 4 (*E*) 2

Sprendimas

Petrui iš Ariogalos teks spręsti centų lygtį – patogiausiai vaizduojantis, kad 1 litas tai yra 100 centų – vaizduojantis galima nieko – nė cento – neimti į rankas ir principai lieka nepažeisti, o gyventi pasidaro techniškai patogiau.

Lygtis bus tokia: jeigu imame

$$X$$

dvicenčių ir

$$Y$$

penkiacenčių monetų, tai

$$2X + 5Y = 100.$$

Kadangi

$$100$$

dalijasi ir iš

$$2$$

ir iš

$$5,$$

tai

$$X$$

dalijasi iš

$$5,$$

o

$$Y$$

dalijasi iš

$$2.$$

Kadangi turi būti ir dvicenčių ir penkiacenčių monetų, tai mažiausia

$$X$$

reikšmė yra

$$5.$$

Tada jei yra 5 dviejų centų, tai bus 18 penkiacenčių monetų.

Toliau gali būti 10 dvicenčių ir 16 penkiacenčių monetų;

gali būti 15dvicenčių ir 14 penkiacenčių monetų;

gali būti 20 dvicenčių ir 12 penkiacenčių monetų;

gali būti 25 dvicenčių ir 10 penkiacenčių monetų;

gali būti 30 dvicenčių ir 8 penkiacenčių monetų;

gali būti 35 dvicenčių ir 6 penkiacenčių monetų;

gali būti 40 dvicenčių ir 4 penkiacenčių monetų;

gali būti 45 dvicenčių ir 2 penkiacenčių monetų;

Taigi yra

$$9$$

skirtingi iškeitimo būdai, kai panaudojamos abiejų rūšių "balti centai" ne po vieną centą ir todėl renkamės atsakymą

$$B.$$

7. Lyduvėnų mokykloje yra dėstomas kūrybinės aritmetikos ir tiltostatos pagrindų fakultatyvas. Kartą to fakultatyvo dalyviai užsidegė noru surasti patį mažiausią tokį natūralųjį skaičių, kuris dalijasi iš 37, kuris baigiasi 37 ir kurio skaitmenų suma, žinoma, irgi yra 37. Toks pats mažiausias skaičius, jų nuomone ir tyrimais, yra užrašomas
(*A*) 4 skaitmenimis (*B*) 5 skaitmenimis (*C*) 6 skaitmenimis (*D*) 8 skaitmenimis (*E*) tokio skaičiaus apskritai nėra.

Sprendimas.

Kadangi skaičius turi baigtis

$$37,$$

kurių suma

$$3 + 7$$

yra

$$10,$$

tai likusiais skaitmenimis reikia "kuo greičiau" surinkti 27.

Skaičius

$$27$$

greičiausiai surenkamas

"trimis devynetais",

neaišku tik, ar "greičiausiai skaitmenų sumą

$$37$$

surenkantis skaičius"

$$99\,937$$

pats dalijasi iš

$$37.$$

Tačiau jau ir 4 uždavinys liudijo, kad

$$999 = 27 \cdot 37,$$

vadinasi, ir skaičius

$$99\,937,$$

kuris yra

$$999 \cdot 100 + 37$$

tikrai dalysis iš

$$37$$

be jokios liekanos: (padaliję gautume dalmenį 2701):

$$\begin{array}{l|l} 99\,937 & \underline{37} \\ \underline{74} & 2701 \\ 25\,9 & \\ \underline{25\,9} & \\ \quad\;\; 37 & \\ \quad\;\; \underline{37} & \\ \quad\;\;\; 0 & \end{array}$$

Kadangi

99 937

yra

5-ženklis

skaičius, todėl ir renkamės teisingą atsakymą

B.

8. Raskite paties mažiausiojo natūraliojo skaičiaus, turinčio 8 daliklius (žinoma, įskaitant ir 1, ir jį patį), skaitmenų sumą

(*A*) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 9 (E) 6

Sprendimas.

Jeigu „aklai“, iš eilės imtume skaičius ir žiūrėtume į jų daliklius ir jų skaičių, tai padėtis būtų tokia:

1 – vienintelis daliklis – jis pats, arba 1;

2 – du dalikliai – 1 ir 2;

3 – nebe trys dalikliai, kaip norėtųsi iš eilės, „dėl akivaizdaus dėsningumo“, kurio norėtųsi, nors jo ir nėra, o vėl du – 1 ir 3;

4 – dabar jau trys dalikliai – 1, 2 ir 4;

5 – du dalikliai – 1 ir 5;

6 – pirmas skaičius su keturiais dalikliais 1, 2, 3, ir 6;

7 – pirminis skaičius, nes vėl su dviem dalikliais 1 ir 7;

8 – vėl keturi dalikliai – 1, 2, 4, 8;

9 – vėl trys dalikliai – 1, 3, 9,

tai suprastume, kad skaičius su

8

dalikliais ir be jokios, net vieno sakinio ilgumo teorijos, matyt, netoliese.

Rašydami toliau tokį skaičių tikrai kada nors rastume, nors ir ne tuoj, nes

10 – 4 dalikliai;

11 – 2;

12 – jau net 6 dalikliai – 1, 2, 3, 4, 6 ir 12.

Toliau ramiau, nes 13 pirminis – 2 dalikliai, 14 dviejų pirminių sandauga – 4 dalikliai, tas pats ir su 15, nes tai juk triskart penki.

Toliau eitų 16, arba 2 pakelta ketvirtuoju laipsniu – vadinasi, penki dalikliai 1, 2, 4, 8 ir 16.

Toliau 17 - pirminis, 18 su vėl 6 dalikliais 1, 2, 3, 6, 9 ir 18 (jau darosi karšta), 19 – pirminis, 20 – su 6 dalikliais – 1, 2, 4, 5, 10 ir 20.

21 – vėl yra dviejų pirminių sandauga, nes tai triskart septyni – kaip ir skaičius 22, kuris yra dukart po vienuolika, vadinasi, abu turi po 4 daliklius, skaičius 23 vėl yra pirminis – du dalikliai – 1 ir pats 23, kaip „pas ponus pirminius skaičius priimta“ .

Toliau einąs skaičius

24

ir turi

8

daliklius

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ir 24

ir yra toks, kokio mums reikėtų, nes jis yra pats mažiausias iš tokių skaičių, kadangi mes visus mažesnius skaičius kantriai peržiūrėjome.

Todėl mažiausias skaičius su

8

dalikliais yra skaičius

24,

kurio skaitmenų suma yra

2 + 4

arba

6

ir todėl renkamės teisingą atsakymą

***E*.**

Pastaba. Galima būtų pateikti ir lašą teorijos.

9. Tytuvėnuose iš skaitmenų 2, 3, 5, 7, panaudojant juos daugiausiai po vieną kartą (tačiau „konkrečiame“ skaičiuje neprivalu panaudoti juos visus) sudaromi visi galimi iš 3 be liekanos besidalijantys skaičiai. Kiek gi rasis Tytuvėnuose tokių skaičių?

(*A*) 9 (*B*) 12 (*C*) 15 (*D*) 18 (*E*) 17

Sprendimas.

Naudosimės „lašu teorijos“.

Tas „lašas“ atrodo taip:

Skaičius

N

ir jo skaitmenų suma

S(N)

abu turi tas pačias dalumo iš

3

liekanas.

Todėl peržiūrinėjame liekanas:

„Sumos po 1“:

Tik pats skaičius

3.

„Sumos po 2“:

2 + 3

2 + 5

2 + 7

(šioji skaitmenų suma tinka, nes dalosi iš 3, ir atsiranda du tinkami skaičiai 27 ir 72)

3 + 5

3 + 7

5 + 7

(ir šioji tinka, bus dar kiti du skaičiai 57 ir 75).

„Sumos po 3“:

2 + 3 + 5 = 10;

2 + 5 + 7 = 14;

2 + 3 + 7 = 12;

(šioji skaitmenų suma vėl labai labai tinka, nes vėl dalijasi iš 3 ir tpdėl perstatinėjant sumos skaitmenis atsiranda jau net

6

tinkami skaičiai

237, 273, 327, 372, 723 ir 732).

Einame toliau:

$$3 + 5 + 7 = 15;$$

(tinka nuostabiai, vėl bus dar

6

skaičiai, šį kartą

357, 375, 537, 573, 735 ir 753).

Galiausiai vienintelė „suma po 4“, arba

$$2 + 3 + 5 + 7 = 14$$

jau nieko nebeprideda, nes iš

3

nesidalija.

Todėl iš viso yra

$$1 + 2 + 2 + 6 + 6 = 17$$

tokių skaičių ir todėl renkamės teisingą atsakymą

***E*.**

10. Raseinių Magdutės senelis Motiejus parašė dviejų tomų trijų Betygalos medžių ir jų apylinkių istoriją. Senelis Motiejus laiko ją pagarbiai skrynelėje kartu su Maironio raštų tritomiu (kad knygos nesudulkėtų). Kas vakarą po Kalėdinių istorijų anūkams senelis Motiejus ištraukia visas tas 5 knygas ir išrikiuoja jas į eilę mažoje lentynėlėje težiūrėdamas tik to, kad pirmasis “Trijų Betygalos medžių ir jų apylinkių“ tomas eitų pirmiau negu antrasis (abi minėtosios knygos gali ir nebūti greta). Į kitus dalykus senelis Motiejus nekreipia jokio dėmesio. Jis tik išgyvena, ar užteks jam gruodžio ir sausio mėnesio dienų išrikiuoti toms knygoms visais galimais būdais. Gabusis anūkas Telesforas suskaičiavo seneliui, kad toms knygoms išrikiuoti jas taip kaip norėtų senelis, yra

(*A*) 24 būdai (*B*) 30 būdų (*C*) 42 būdai (*D*) 60 būdų (*E*) 64 būdai

Sprendimas.

Ir čia įmanoma būtų viską atlikti

„plikomis rankomis“

arba paimti tas penkias knygas:

2

tomus Betygalos med-ių ir apylinkių istorijų ir dar kitus

3

tomus MAIRONIO raštų, arba iš viso

$$2 + 3,$$

kitaip sakant.

5

knygas ir jas perstatyti visais galimais būdais, kurių būtų

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

arba lygiai

120

būdų.

Tačiau dabar galima pasinaudoti

„veidrodžiu“:

Kiekvienam

„tikusiam“

išrikiavimui, kai

1-asis

Betygalos tomas eina pirmiau, o antrasis paskiau – taip svajota ir norėta – atitinka

„netikęs“

išrikiavimas, kai Maironio tomai lieka, kur stovėję, o Betygalos tomai šast ir susikeičia vietomis,

2-asis

šoka ten, kur buvo

1-asis,

o

1-asis

ten, kur ką tik buvo

2-asis.

Ir taip kiekvieną kartą.

Todėl ir bus lygiai pusė „rikiavimų“, kur Betygalos dvitomis išlaiko

„subordinaciją“

ir dar pusė, kur neišlaiko.

Vadinasi, tinkamų rikiuočių yra pusė skaičiaus nuo visų perstatų skaičiaus, kurių iš viso yra

120.

Mokslas moka nesunkiai įtikinti visus, kas tik tuo nuosekliai domisi, kad pusė nuo

120

yra lygiai

60,

ir todėl renkamės teisingą atsakymą

D.

SPRENDIMAI

VIENUOLIKTOJI KALĖDINĖ JUBILIEJINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2010-12-15

1. Dėl staiga paaiškėjusio vietinių pašarų stygiaus Viduklės ūkininkas Dobilas Pašaris nejučia nubraukęs ašarą pardavė 50 laikomų arktinių Grenlandijos avinų, nes pilnaverčių vietinių pašarų pamatė teturintis tik 9 savaitėms, kai šerti dar buvo likę ištisas 10 savaičių. Kiek arktinių Grenlandijos avinų laikė tas tvarkingas Viduklės ūkininkas Dobilas Pašaris, pas kurį visi avinai kasdien suėsdavo lygiai po tiek pat vietinių pašarų.

Sprendimas

Jeigu

$$X$$

yra vieno arktinio avino vienos savaitės vietinio pašaro porcija, o ūkininkas laiko

$$M$$

arktinių Grenlandijos avinų, tai jis turi

$$9 \cdot M \cdot X.$$

pašarų kiekį.

Būtent tokio pašarų kiekio pagal sąlygą

$$M - 50$$

avinų užtektų

$$10$$

savaičių, vadinasi,

$$10 \cdot (M - 50) \cdot X$$

yra toks pats pašarų kiekis.

Todėl

$$9 \cdot M \cdot X = 10 \cdot (M - 50) \cdot X,$$
$$9 \cdot M = 10 \cdot (M - 50),$$

arba

$$9 \cdot M = 10 \cdot M - 500$$

ir

$$M = 500.$$

Atsakymas.

Viduklės ūkininkas Dobilkas Pašaris laiko 500 arktinių Grenlandijos avinų.

2. Jautriai pavalę vieną pelėsiais ir kerpėm apaugusią žemai legendinio Lyduvėnų geležinkelio tilto atramos dalį jaunieji archeologai rado senovinį raižinį, kuriame buvo pavaizduotas paslaptingas

$$5 \text{ x } 5$$

kvadratas (be centrinio langelio, brėžinyje paženklintu istoriškai nusistovėjusia didžiąja X).

Istorijos mokytojas Žygimantas Augustaitis jiems paaiškino, kad taip tiksliojoje archeologijoje ir lyginamojoje lingvistikoje yra vadinamas *Žemaitiškas ratas* (*Circum Samogitiensis*).

24 to *Žemaitiškojo rato* langeliuose buvi įrašyti tokie skaičiai:

1	2	1	3	2
3	4	3	2	3
2	2	X	1	1
1	4	1	5	3
5	1	2	2	2

Pagal Didžiojo Kunigaikščio Vytauto laikus siekiančius padavimus bet kuris *Žemaitiškasis ratas* atneša ilgalaikę laimę tam, kas sugeba tą 24 kvadratėlius turinčią figurą padalyti į „*kampukus*“, turinčius po 3 langelius kiekvienas ir gaunamus iš

2 x 2

matmenų kvadratėlio, iškirpus bet kurį vieną jo kampinį langelį.

Dar būtinai reikalaujama, kad sumos, gaunamos sudėjus kiekvieno „*kampuko*“ tris skaičius, būtų visos vienodos.

Jaunieji archeologai mąsto, kaip čia tokią užduotį nuveikus, mokytojas Žygimantas Augustaitis juos drąsina, direktorė Aldona nekantriai laukia, bet tik Jūs galėtimėte konkrečiai nurodyti, ar tai įmanoma ir jei tai įmanoma, tai kaip tai padaryti?

Sprendimas

Kadangi žemaitiškas ratas susideda iš

24

langelių, o „kampukas“ yra

2 x 2

kvadratėlis be vieno langelio, vadinasi, jis visada turi

3

langelius, tai žemaitišką ratą mėginsime sudėti iš

24 : 3 = 8

„kampukų“.

Visų 24 „žemaitiško rato“ skaičių suma yra

(1+2+1+3+2)+(3+4+3+2+3)+(2+2+1+1)+(1+4+1+5+3)+(5+1+2+2+2+2) =

9 + 15 + 6 + 14 + 12 = 56.

Todėl vienam „*kampukui*“ tenkanti

3

skaičių suma turi būti lygi

56 : 8 = 7.

Beliko pamėginti atlikti suskirstymą.

Tai padaryti galima, pavyzdžiui, taip, kaip tai pavaizduota žemiau, kur mes atskirai parodome kiekvieno „*kampuko*“ padėtį *„žemaitiškame rate*“.

1	2			
	4			
		X		

3				
2	2	X		

		X		
1				
5	1			

		X		
	4	1		
		2		

		X		
				3
			2	2

		X	1	1
			5	

				2
			2	3
		X		

		1	3	
		3		
		X		

3. Stačiakampio *ABCD* įstrižainės susikerta taške *S*. Per tašką *A* Magdutė nubrėžė statmenį stačiakampio įstrižainei *AC* ir pratęsė jį tol, kol jis taške *E* susikirto su pratęstos kitos stačiakampio įstrižainės *BD* tęsiniu.

Magdutė žino, kad stačiakampio įstrižainė *AC* yra lygiai 10 centimetrų ilgio ir kad kampo *BAC* didumas yra 30º. Mergaitė labai norėtų kuo greičiau surastį tikrąjį atkarpos *DE* ilgį. Padėkite jai tai padaryti.

Sprendimas

Jeigu

$$\angle BSA = 30^{\circ},$$

tai

$$\angle SAD$$

kaip papildantis jį iki stataus kampo yra lygus

$$60^{\circ}.$$

Tada

$$\Delta\, SAD,$$

kuris būdamas stačiakampyje visada ir šiaip yra lygiašonis, pavirsta lygiakraščiu trikampiu su visomis iš čia išplaukiančiomis pasėkmėmis:

$$SA = AD = DS.$$

Pagal sąlygą

$$\Delta\, SAE$$

yra statusis, o jo vienas smailusis kampas, būtent

$$\angle ASE,$$

yra lygiašonio trikampio

$$\Delta\, SAD$$

kampas, todėl

$$\angle ASE = 60^{\circ}.$$

Tada kitas to stačiojo trikampio

$$\Delta\, SAE$$

smailusis kampas

$$\angle SEA$$

yra, žinoma,

$$30^{\circ}.$$

Tada

$$\Delta\, ADE$$

yra lygiašonis su smailiaisiais kapais po

$$30^{\circ}$$

ir šonine kraštine

$$AD,$$

kuri yra lygiakaraščio trikampio

$$\Delta\, SAD$$

kraštinė, todėl ieškomoji kraštinė

$$DE$$

tenkina sąlygas

$$DE = AD = AS.$$

Tačiau

$$AS$$

yra pusė visos stačiakampio įstrižainės

$$AC,$$

kuri yra

$$10$$

centimetrų, todėl

$$DE = 5$$

centimetrai.

Atsakymas

Tikrasis atkarpos

$$DE$$

ilgis yra

$$\mathbf{5}$$

centrimetrai.

4. Vadžgiryje du žvalūs berniukai Pilypas ir Jokūbas spėlioja lygčiai

$$2010x - 2009y = 1.$$

tinkančias natūraliųjų skaičių x ir y poras.

(A) Pilypas sako, kad galima rasti tokią tai lygčiai tinkančią natūraliųjų skaičių x, y porą, kurių suma

$$x + y$$

mažesnė už 5.

Ar jis teisus?

Nurodykite tokią skaičių porą, jeigu tai įmanoma.

(B) Jokūbas sako, kad galima rasti tokią tai lygčiai tinkančią natūraliųjų skaičių x ir y porą, kad kiekvienas iš tų skaičių būtų didesnis už

$$2000.$$

Ar jis teisus?

Nurodykite tokią skaičių porą, jeigu tai tik pasirodytų įmanoma.

(C) Atėjusi Raseinių Magdutė sako, kad tai lygčiai galima parinkti ir tokius natūraliuosius skaičius x ir y, kurių kiekvienas didesnis net už

$$20\,000.$$

Ar Raseinių Magdutė teisi?

Nurodykite tokią skaičių porą, jeigu tai tik pasirodytų įmanoma.

Sprendimas

(A)

Nesunku matyti, kad pora

$$(x, y) = (1, 1)$$

yra tinkamas sprendinys, nes

$$2010\cdot 1 - 2009\cdot 1 = 1.$$

(B)

Nesunku matyti, jog jei tinka

$$(x, y) = (1, 1),$$

tai turi tikti ir

$$(x, y) = (1 + 2009, 1 + 2010),$$

arba

$$(x, y) = (2010, 2011).$$

Tikrai

$$2010(1 + 2009) - 2009(1 + 2010) = 1,$$

nes

$$2010 + 2010 \cdot 2009 - 2009 - 2009 \cdot 2010 = 1,$$
nes
$$2010 \cdot 2009$$
yra skirtingų ženklų ir „išsisprastina“.

Pastaba. Arba šiuo kartu viskas tėra tik atskiras lygybės
$$N \cdot N - (N - 1) \cdot (N + 1) = 1$$
atvejis.

(C)

Dabar užtenka „pratęsti mintį“:

Nesunku matyti, jog jei tinka
$$(x, y) = (1, 1),$$
tai turi tikti ir, kaip ką tik matėme, tikrai tinka ir
$$(x, y) = (1 + 2009, 1 + 2010),$$
bet tada lygiai taip pat nesunku patikrinti, kad tinka ir
$$(x, y) = (1 + 2009 \cdot 2, 1 + 2010 \cdot 2),$$
$$(x, y) = (1 + 2009 \cdot 3, 1 + 2010 \cdot 3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x, y) = (1 + 2009 \cdot n, 1 + 2010 \cdot n).$$

Imdami
$$n = 10$$
gautume tinkamą Raseinių Magdutės skelbtą ir žadėtą porą
$$(x, y) = (1 + 2009 \cdot 10, 1 + 2010 \cdot 10) = (20091, 20101).$$

Atsakymas

Raseinių Magdutė yra teisi: ir apskritai yra

„KOKIO TIK NORI DIDUMO“

sprendinių.

5. Ariogalos skaičių fanai per keletą dienų suskaičiavo, kiek bus
$$2010^{2010}$$
ir be vienos klaidos sudėjo visus to oi! didžiulio skaičius skaitmenis. Po to jie vėl sudėjo visus to gautojo naujojo skaičiaus skaitmenis ir taip jie be atvangos „varė“ toliau – kol galiausiai – taip iki galo ir nepadarę nė mažiausios klaidelės – prisikasė iki vienženklio skaičiaus A.

Atėjusi Magdutė tik šyptelėjo ir pareiškė, kad ji apskritai be jokių daugiadienių skaičiavimų gali nors ir dabar, nieko daugiau nežinodama, garantuotai pasakyti, ar skaičius
$$2010 - A$$
dalijasi iš
$$23,$$
ar nesidalija ir, žinoma, vienu sakiniu paaiškinti, kodėl taip yra.

Negi tai tikrai įmanoma?

(Stasys iš Ariogalos tuo nė už ką netiki, nors tu jam kuolą ant galvos tašyk, o jo pažįstamas Ramūnas iš Šiluvos tol negarsiai ir nesustodamas kikeno, kol galiausiai nustebusiems draugams ėmė ir išdrožė, kad vieną sykį ir jis buvo suabejojęs Magdutės aiškinimais – tai dar ir dabar gerai atsimena, kuo visa baigėsi.)

Kaip čia iš tikrųjų yra?

Ar skaičius

$$2010 - A$$

dalijasi iš 23 ir kodėl?

Sprendimas.

Kadangi skaičius

$$A$$

Turi tokią pačią dalumo iš

$$3$$

ir iš

$$9$$

liekaną, kokią turi to skaičiaus skaitmenų suma, tai belieka tik susivokti, kad skaičiaus

$$2001$$

skaitmenų suma yra

$$3,$$

vadinasi, bet kuris už vienetas didesnis jo laipsnis jau tikrai dalysis ir iš

$$9,$$

todėl atrsirasiantis vienaženklis skaičius

$$A$$

irgi privalės dalytis iš

$$9,$$

vadinasi, jis ir pats bus

$$9.$$

Bet skaičius

$$2010 - 9 = 2001$$

dalijasi iš

$$23,$$

nes

$$\begin{array}{r|l} 2001 & \underline{23} \\ \underline{184} & 87 \\ 161 & \\ \underline{161} & \\ 0 & \end{array}$$

Atsakymas.

Magdutė yra teisi, nes skaičius

$$\boldsymbol{A}$$

yra lygus

$$\mathbf{9,}$$

o

$$\mathbf{2010 - 9 = 2001 = 23 \cdot 87.}$$