ŠEŠIOLIKTOJI RUDENINĖ KOMANDINĖ IR INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

KOMANDINĖS DALIES ATSAKYMŲ KORTELĖ

UŽDAVINIO NUMERIS	TEISINGAS ATSAKYMAS
1.	D
2.	E
3.	A
4.	B
5.	B
6.	C
7.	E
8.	C
9.	A
10.	D

ŠEŠIOLIKTOJI RUDENINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2015-10-25

1. Raseinijoje dar ir dabar pasakojama legenda, kad kažkada, labai senais laikais, kai šiame krašte pasirodė pirmieji bėgliai iš kosmoso ir atsirado didžiulis praktinis reikalas susigaudyti, kurie iš jų yra labiau išprusę, tai tuo tikslu buvo net parengtas specialus testas. Jo esminis uždavinys buvo toks: *Žinodami, kad* 555 555 : 7 = 79365, *suraskite skaičiaus* 55....55, *sudaryto iš* 55 *penketų, dalybos iš* 7 *liekaną ir trumpai paaiškinkite, kodėl ji yra tokia.*

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Sprendimas
Jeigu jau skaičius, sudarytas iš šešių penketų, arba 555 555, dalijasi be liekanos iš 7, tai iš 7 be liekanos dalinsis ir skaičius, sudarytas iš dvylikos penketų, arba skaičius 555 555 555 555, nes jis yra lygus 555 555 · 1 000 001. Panašiai iš 7 be liekanos dalinsis ir skaičiai sudėti iš 18, 24, 30, 36, 42, 48 ir 54 penketų. Jeigu skaičius sudėtas iš 54 penketų dalijasi be liekanos iš septynių, tai ir 55-ženklis skaičius, kuris gaunamas prie skaičiaus, sudaryto iš 54 septynetų iš dešinės prirašius 0, arba 55-ženklis skaičius 55....550, irgi dalijasi iš septynių. Tačiau tada jis nuo skaičiaus, nurodyto sąlygoje, „tesiskiria per 5“, nes 55....55 – 55...550 = 5, todėl ir kalbamoji liekana bus 5, ir todėl teisingas atsakymas yra D.
Atsakymas
D

2. Kai ir Marse buvo įvesti mūsuose gerai žinomi laipsnio rodikliai, tai gebėjimas skaičius $a=(3^4)^5$, $b=(4^4)^4$ ir $c=(5^4)^3$ surikiuoti iš eilės nuo mažiausiojo iki didžiausiojo buvo laikomas aukščiausio lygio kompetencija. Pats pirmasis Marso berniukas, sugebėjęs tai atlikti, buvo, suprantama, vardu Martynas. Kokias nelygybes gavo pirmasis Marso aritmetikas Martynas?

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $c < b < a$ (E) $c < a < b$

Sprendimas
Turime palyginti skaičius $a=3^{20}, b=4^{16}$ ir $c=5^{12}$. Kadangi $3^5=243>125=5^3$, tai $(3^5)^4=3^{20}=a>(5^3)^4=c.$ Taigi $a > c$. Toliau, kadangi $4^4=16^2=256>243=3^5$, tai $(4^4)^4=4^{16}=b>(3^5)^4=3^{20}=a.$ Taigi $b > a$ ir, vadinasi, $b > a > c$ ir todėl, apvertus tokiu būdu, kokiu yra pateikiami siūlomi atsakymai, turėtume, kad $c < a < b$, o tai yra atsakymas E.
Atsakymas
E

3. Už 170 šviesmečių nuo Visatos centro esančioje Raseižės planetoje savaitė trunka aštuonias dienas, iš kurių septintoji diena yra sekmadienis. Mėnuo ten turi trisdešimt keturias dienas, o metuose yra keturiolika mėnesių. Kadangi pagal padavimą į šią planetą pirmieji nuolatiniam gyvenimui atsikraustė judrieji žemaičiai, tai Raseižės planetoje yra visuotinai priimta pirmąją metų dieną, jeigu ji išpuola sekmadienį, iškilmingai švęsti Žemaičio dieną. Šiandien Raseižės planetoje iškilmingai pažymima Žemaičio diena. Už kelių dienų bus kita artimiausia Žemaičio diena?

(A) už 952 dienų (B) už 1904 dienų (C) už 476 dienų (D) už 1428 dienų (E) už 238 dienų

Sprendimas

Kadangi $34 \cdot 14$ iš 8 nesidalija, nes $34 \cdot 14$ dalijasi tik iš 4, tai kita Žemaičio diena bus už dvejų Raseižės metų ($2 \cdot 34 \cdot 14 = 2 \cdot 476 = 952$) tikrai jau dalijasi iš 8 ir todėl teisingas atsakymas yra A.

Atsakymas A (už 952 dienų)

4. Per keturių planetų – Marso, Merkurijaus, Veneros ir Saturno – atstovų viešnagę į Gelgaudiškį jų atstovai kartu su Magdalenos Raseiniškės anūke Aušrine laukdami, kol bus reikiamai atšaldyti ledai, nutarė išspręsti tokį uždavinį. *Į kiekvieną 4 × 4 lentelės langelį turi būti įrašyta po vieną skaičių tokiu būdu, kad visuose 2 × 2 kvadratuose skaičių sumos būtų skirtingos.* Jie taip ilgai ginčijosi, kiek *mažiausiai skirtingų skaičių gali būti tokioje lentelėje*, kad liko be ledų. Nuspręskite, kuris iš jų sakė tiesą, jei jų nuomonės buvo tokios:
(A) Marso atstovas Martynas sakė, kad lentelėje mažiausiai gali būti du skaičiai (B) Veneros atstovas Venius sakė, kad trys (C) Žemės duktė Aušrinė šypsodamasi sakė, kad keturi (D) Saturno atstovas Satkauskas sakė, kad penki (E) Merkurijaus atstovas Merkys sakė, kad šeši

Sprendimas

1	**1**	**1**	**3**
1	**1**	**2**	**1**
2	**2**	**3**	**3**
3	**3**	**3**	**3**

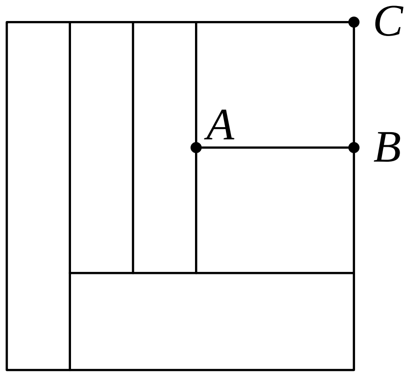
Pirmiausiai pateiksime pavyzdį, kad su trimis skaičiais išsiversti galima:
tos sumos (nuo viršaus imant iš kairės į dešinę ir toliau leidžiantis žemyn) yra tokios: 1 + 1 + 1 + 1 = 4, 1 + 1 + 1 + 2 = 5, 1 + 2 + 3 + 1 = 7, 1 + 1 + 2 + 2 = 6, 1 + 2 + 2 + 3 = 8, 2 + 1 + 3 + 3 = 9, 2 + 2 + 3 + 3 = 10, 2 + 3 + 3 + 3 = 11, 3 + 3 + 3 + 3 = 12.

Toliau pastebėkime, kad kvadrate 4 × 4 yra 9 skirtingi kvadratai 2 × 2, o dviem skirtingais skaičiais M ir N užpildyta lentelė 4 × 4 mažesniuose 2 × 2 kvadratuose tegalėtų duoti tik penkias skirtingas sumas, kurios tada turėtų būti tokios: 4M, 3M + N, 2M + 2N, N + 3M ir 4N. Tai reiškia, kad teisingas yra atsakymas B (kad pakaks trijų skirtingų skaičių).

Atsakymas

Tiesą sakė Veneros atstovas Venius, arba atsakymas B.

5. Matininkai iš kosmoso nuščiuvę stebėjo(si), kaip meistriškai ir sumaniai Šimkaičių matininkas Izidorius pajėgė padalinti vieną tokį kvadrato formos sklypą į 6 stačiakampius sklypus. Visi šeši sklypai jam „gavosi“

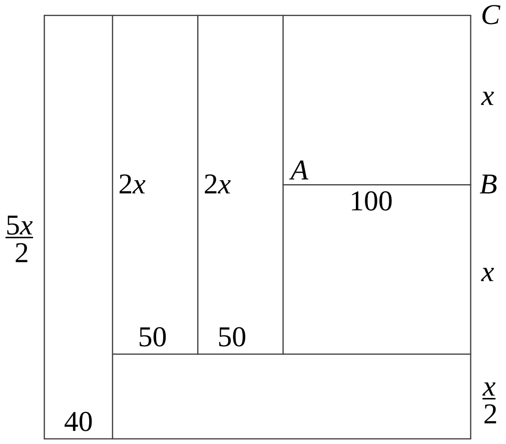


griežtai vienodo ploto. Jų nuotraukoje sklypas atrodė taip, kaip tai parodyta piešinyje, nors sklypų matmenis galėjo iškreipti kosminis ūkas. Po to jie kurį laiką labai įnirtingai ginčijosi ir svarstė, kokio ilgio turėtų būti vieno iš sklypų kraštinės *BC* ilgis, jeigu kitos kraštinės *AB* ilgis pagal tikslius matininko Izidoriaus skaičiavimus yra lygiai 100 metrų**.** Kokio gi?

(A) 75 metrai (B) 96 metrai (C) 100 metrų (D) 90 metrų (E) 80 metrų

Sprendimas

Pirmiausiai tą ieškomą BC ilgį pasižymime x ir visą laiką žiūrime, kad kiekvieno iš tų šešių stačiakampių plotas visada būtų $100x$. Kitų stačiakampių matmenys yra surašyti brėžinyje (juos užrašome vieną po kito, remdamiesi plotų ar lygiagrečių atkarpų lygybe).



Baigę surašyti prisimename, kad sklypas yra kvadratinės formos, todėl jo ilgis turi būti lygus pločiui, arba $\frac{5x}{2}=40+50+50+100.$ Toliau jau viskas aišku, nes $\frac{5x}{2}=240$, $5x=480.$ Pagaliau $x=\frac{480}{5}=96$ ir teisingas atsakymas yra B.

Atsakymas

B

6. Raseinių vaikai su ateiviais iš kosmoso mėgsta žaisti tokį žaidimą. Ateiviai vienu metu parodo savo užrašytąjį triženklį skaičių ABC, o raseiniškiai – savo triženklį skaičių DEF. Jeigu ateivių ir raseiniškių skaičių visi skaitmenys A, B, C, D, E, F yra skirtingi ir ateivių skaičius didesnis, tai tada iš ateivių skaičiaus pats jauniausias vaikas atima šeimininkų raseiniškių skaičių. Kokį patį mažiausią skaičių skirtumą jis gali gauti?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Sprendimas

Pirmiausiai pastebėkime, kad galima gauti 3, nes jau kad ir tokioje neabejotinoje lygybėje 601 – 598 = 3 visi turinio ir atėminio skaitmenys yra „pirštu prikišamai“ skirtingi. Beliktų paaiškinti, kad mažiau gauti „niekaip nešviečia“. Šimtų skaitmenys turi būti skirtingi, skirtis ne mažiau kaip per 1 visais atvejais, o mažo bendro skirtumo (1 arba 2) atveju tiksliai per vienetą: A = D + 1. Tada per vienetą tegali skirtis tik tokie triženkliai skaičiai: A00=(D+1)00 ir D99, o tai jau net dvi sutampančių skaitmenų poros. Lygiai taip pat triženklių skaičių skirtumas negali būti lygūs dviem, nes tai reikštų arba porą triženklių skaičių A01 ir D99, arba A00 ir D98. Tai reiškia, kad teisingas atsakymas yra C (čia kita C kaip sąlygoje, bet tikime, kad tai skaitytojo per daug nepainioja☺)

Atsakymas

C

7. Nejaugi matematikos pasaulyje gali rastis tokių sveikųjų skaičių k, kurie trupmeną $\frac{k+9}{k+6}$ paverstų sveikuoju skaičiumi? Kiek iš tikrųjų iš viso tokių skaičių yra?

(A) Tokių sveikųjų skaičių nėra (B) Vienas (C) Du (D) Trys (E) Keturi

Sprendimas

Kadangi $\frac{k+9}{k+6}=\frac{k+6+3}{k+6}=1+\frac{3}{k+6}$, tai minėtoji trupmena gali būti sveikasis skaičius, kai k + 6 dalija 3, tai yra, kai $k+6$ yra lygus –3, – 1, 1 arba 3, o tai reiškia, kad pats k yra –9, – 7, – 5 arba – 3 ir todėl teisingas yra atsakymas E.

Atsakymas

E

8. Laikraštis „Ariogalos arimai“ kainuoja 0,90 €, o perkant kartu su priedu „Raseinių rasos“ – 2,40 €. Ateiviai iš kosmoso norėdami įvertinti ir ariogališkių skaičių, ir jų domėjimąsi gimtojo krašto reikalais, ištisą dieną atidžiai sekė, kiek laikraščių bus parduota centriniame Ariogalos spaudos platinimo punkte. Paaiškėjo, kad paties laikraščio buvo parduota „apvalus“ 333 egzempliorių skaičius. Kiek „Raseinių rasų“ egzempliorių buvo parduota, jeigu iš viso už visus parduotus numerius su visais priedais buvo surinkta 539,70 €?

(A) Mažiau negu 66 egzemplioriai
(B) Daugiau kaip 66, bet mažiau negu 132
(C) Daugiau negu 133, bet mažiau kaip 200
(D) Daugiau kaip 201, bet mažiau negu 266
(E) Daugiau kaip 266 egzemplioriai

Sprendimas

Kadangi laikraštis „Ariogalos arimai“ kainuoja 0,90 €, o perkant kartu su priedu „Raseinių rasos“ – 2,40€, tai pats „Raseinių rasų“ priedas „atsieina“ 2,40 – 0,90 = 1,50 €. Jeigu paties laikraščio „Ariogalos arimai“ egzempliorių buvo parduota 333 egzempliorių, o jo prie „Raseinių rasos“ – x egzempliorių, tai iš duomenų apie surinktus pinigus turi būti 333 · 0,9 + 1,5x = 539,7. Toliau gauname 299,7 + 1,5x = 539,7 ir 1,5x = 240 bei x = 160. Todėl visi, kad tik tuo domėjosi – ir ateiviai, ir išeiviai (ir net praeiviai) – galėjo suvokti, jog teisingas atsakymas yra C (nes paties priedo buvo parduota, kaip radome, 160 egzempliorių).

Atsakymas

C

9. Ateivis iš kosmoso, vardu Makstaras, išlipęs iš erdvėlaivio pačiame Kryžkalnyje, tuojau puolė pasakoti ne tik apie tai, kad jo kelionė iš gimtosios žvaigždės į Žemę truko trejus metus, bet dar ir ėmė girtis savo darbštumu. Jis pasakojo, kad kelionės metu jis didėjimo tvarka surašė visus penkiaženklius skaičius, užrašomus po vieną kartą panaudojus skaitmenis 1, 2, 3, 4 ir 5. Jis pradėjęs pačiu mažiausiu tokiu skaičiumi 12345 ir baigęs pačiu didžiausiu skaičiumi 54321, ir jis viską apie tuos skaičius žinąs. Po to jis ėmė klausinėti Kryžkalnio vaikų, gal jie kaip nors galėtų susiprasti, koks gi skaičius būtų šimtuoju skaičiumi toje įspūdingoje skaičių virtinėje. Ar labai jus nustebintų žinia, kad Kryžkalnio vaikai per porą minučių pateikė misteriui Makstarui absoliučiai teisingą to uždavinio atsakymą? Tuo 100-uoju virtinės skaičiumi yra skaičius

(A) 51342 (B) 51324 (C) 51243 (D) 51423 (E) 52134

Sprendimas

Jei po vieną kartą panaudotume tik du skaitmenis, sakysime, 1 ir 2, tai tokių skaičių būtų tik 2 (12 ir 21), jeigu po vieną kartą panaudotume tris skaitmenis, sakykime 1, 2 ir 3, tai tokių skaičių būtų jau 6 (123, 132, 213, 231 ir 321). Panašiai, naudojant po kartą skaitmenis 1, 2, 3 ir 4, tokių keturženklių skaičių gautume jau 1 · 2 · 3 · 4 = 24, o po kartą panaudoję visus skaitmenis 1, 2, 3, 4 ir 5 jau turėtume net 120 = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 tokių skaičių. Toliau yra visai aišku, kad rikiuojant pirmieji dvidešimt keturi skaičiai prasideda vienetu, kiti dvidešimt keturi prasideda dvejetu, tolesni dvidešimt keturi (nuo 49 iki 72) prasideda trejetu, tolesni skaičiai (nuo 73 iki 96) prasideda 4-tu, o visi likusieji nuo 97-o iki pat paskutinio 120-o prasideda 5-tu. Tas 97-asis skaičius, savaime suprantama, bus 51234, toliau eina 98-asis, arba 51243, dar toliau jau 99-tasis, kuris yra 51324, ir galiausiai 100-asis skaičius yra 51342, o tai yra atsakymas A.

Atsakymas

A

10. Kai Raseiniškių delegacija pirmą kartą viešėjo Marse, jiems buvo parodytas stebuklingas tvenkinys. Tame tvenkinyje plaukiojo raudonieji ir geltonieji veidrodiniai karpiai. Du penktadaliai visų tvenkinio karpių buvo geltoni, o likę karpiai – raudoni. Trys ketvirtadaliai geltonųjų karpių, kaip buvo teigta, yra moteriškos giminės. Dar buvo pasakyta, kad tarp visų karpių vyriškos ir moteriškos giminės karpių esama po lygiai. Po to, kaip rimta užduotis, buvo teikiamas klausimas, kokia trupmena reiškiama raudonųjų vyriškos giminės karpių dalis visoje karpių populiacijoje. Raseiniškiai žaibiškai susivokė, kad toji dalis reiškiama trupmena, kuri yra

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

Sprendimas

Delegacijoje buvęs Magdalenos Raseiniškės proproanūkis Rasius uždavinį kone vienu sakiniu išsprendė įsivaizduodamas, kad tame tvenkinyje iš viso yra $10N$ karpių. Tada pagal sąlygą du penktadaliai karpių yra geltonieji (G), tai, vadinasi, jų yra $4N$, o tada vis likę $6N$ karpių turi būti raudonieji karpiai (R). Iš karto pastebėkime, jog pasakyta, kad bendras vyriškų ir moteriškų karpių skaičių yra toks pats, vadinasi, ir vyriškų, ir moteriškų karpių yra po $5N$. Kadangi trys ketvirtadaliai geltonųjų karpių yra moteriškos giminės, o geltonųjų iš viso yra $4N$, tai moteriškos giminės geltonųjų karpių yra $3N$, o tada moteriškos giminės raudonųjų karpių yra $5N - 3N = 2N$. Vyriškų raudonųjų karpių tada turi būti $6N - 2N = 4N$. Jeigu jau iš bendro visų karpių skaičiaus $10N$ raudonųjų vyriškos giminės karpių yra $4N$, tai jų dalis tarp visų karpių yra

$\frac{4N}{10N} = \frac{2}{5}$, arba teisingas atsakymas yra D.

Atsakymas

D

ŠEŠIOLIKTOJI RUDENINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2015-10-25

1. Žr. komandinės olimpiados 1 uždavinį.

2. Žr. komandinės olimpiados 4 uždavinį.

3. Marsiečiai galutinai suprato, kad jie pajėgs deramai įsigilinti į Žemės dukterų ir sūnų išmintį, kai elitiniuose Marso aritmetikos darželiuose pastebimai pagausėjo vaikų, galinčių per pusdienį išspręsti tokį uždavinį. *Į 16 kvadrato 4 × 4 langelių buvo surašyti visi skaičiai nuo 5 iki 20 (po vieną skaičių į langelį). Po to vienodi skaitmenys buvo pakeisti vienodomis, o skirtingi skaitmenys – skirtingomis raidėmis ir taip buvo gauta parodytoji lentelė. Dar yra žinoma, kad visos aštuonios keturių eilučių ir keturių stulpelių skaičių sumos yra vienodos ir kad* K > B. *Kokios raidės kokiais skaičiais buvo keičiamos, arba, kitaip tariant, atstatykite pradinę lentelę.*

ZK	B	ZF	ZZ
G	ND	C	ZA
ZB	K	ZC	ZN
ZD	ZG	F	ZE

Sprendimas

Pirmiausiai yra aišku, kad N yra lygus 2, o Z, savaime aišku, tai 1. Akivaizdu ir tai, kad D = 0. Įrašius visa tai į lentelę, joje turime jau šiek tiek, jeigu ne daug daugiau, aiškumo:

1K	B	1F	11
G	20	C	1A
1B	K	1C	12
10	1G	F	1E

Toliau aišku, kad visų visos lentelės skaičių suma yra lygi 5 + 6 + ...+ 19 + 20 = (5 + 20) + (6 + 19) +...+ (12 + 13) = 25 + 25 +....+ 25 = 25 · 8 = 200. Iš čia nedelsiant išplaukia, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio suma (kadangi jos yra tarpusavyje lygios) yra 200 : 4 = 50.

Pasižiūrėję į ketvirtą stulpelį turime, kad 11 + 1A + 12 + 1E = 50, arba A + E = 7. Taigi A ir E yra skaitmenys 3 ir 4 arba 4 ir 3. O dirstelėję dar ir į trečią matome, kad 1F + C + 1C + F = 50 arba kad C + F = 15. Dar pasižiūrėję vienu metu ir į pirmąją, ir trečiąją eilutes turime, kad 1K + B + 1F + 11 = 1B + K + 1C + 12, vadinasi, F = C + 1. Kadangi mums jau sakė, kad C + F = 15, tai tada C = 7, o F = 8. Įrašome:

1K	B	18	11
G	20	7	1A
1B	K	17	12
10	1G	8	1E

Lentelėje greta tik vieną kartą pasitaikančių ir jau žinomų skaitmenų 7 ir 8 dar yra trys nepaminėti skaitmenys 5, 6 ir 9, kurių suma B + G + K yra, suprantama, lygi 20. Kadangi pirmoje eilutėje 1K + B + 18 + 11 = 50, tai K + B = 11 ir G = 9. Tada iš ketvirtos eilutės E lygus 3, o iš antrosios A lygus 4. Kadangi K > B, tai K = 6, B = 5.

Atsakymas:

16	5	18	11
9	20	7	14
15	6	17	12
10	19	8	13

4. Žr. komandinės olimpiados 9 uždavinį.

5. Žr. komandinės olimpiados 5 uždavinį.