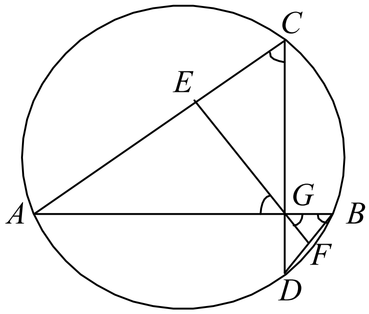
Rietavo pirmoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2002 m. sausio 26 d.

Užduoties jaunesniųjų klasių moksleiviams **sprendimai**

1. Skritulyje išvestos dvi tarpusavyje statmenos stygos AB ir CD. Jų galai sujungti atkarpomis BD ir AC. Iš atkarpos BD vidurio taško per stygų AB ir CD susikirtimo tašką išvesta tiesė. Įrodykite, kad ši tiesė atkarpą AC kerta statmenai (žr. 1 pav.).

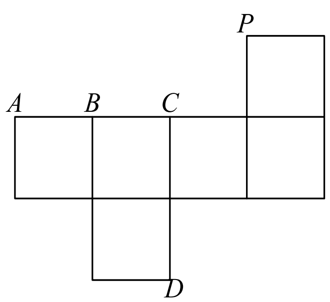


1 pav.

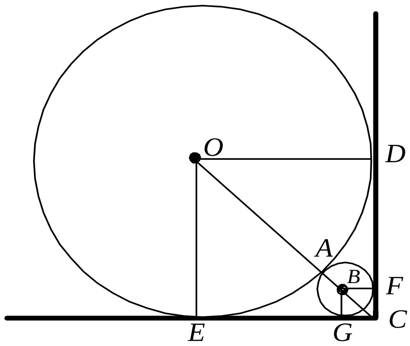
Sprendimas. Trikampis DGB - statusis, todėl $GF=FB=FD$ (GF- pusiaukraštinė) ir trikampis GBF - lygiašonis. Tuomet $\angle FGB = \angle GBF$. Be to, $\angle ACD = \angle ABD$ (įbrėžtiniai kampai remiasi į tą patį lanką). Kadangi dar $\angle BGF = \angle EGA$ (kryžminiai kampai), tai $\angle ECG = \angle EGA$. Vadinasi, $\angle ECG + \angle CGE = \angle EGA + \angle CGE = 90^0$. Taigi $\angle CEG = 90^0$.

2. Kamuolys, kurio skersmuo 29 cm, padėtas ant grindų taip, kad liestų ir kambario sieną. Ar pro susidariusį tarpą galima praridenti 5 cm skersmens rutuliuką? (žr. 3 pav.)

   Sprendimas. Pagal Pitagoro teoremą $OC = \frac{29}{2}\sqrt{2}$, $BC = \frac{5}{2}\sqrt{2}$. Kad būtų galima praridenti mažąjį rutuliuką, turėtų galioti nelygybė $\frac{29}{2}\sqrt{2} - \frac{29}{2} > \frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}$, t.y. $24\sqrt{2} > 34$. Pakėlę kvadratu gautume, kad 1152>1156. Taigi negalima.



2 pav.



3 pav.

3. Jeigu iš šios išklotinės (2 pav.) sulankstytume kubą, su kuriuo iš taškų A, B, C ar D sutaptų taškas P?

   Ats. Sulanksčius, taškas P sutaps su tašku C.

4. Įrodykite, kad $A=\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\ge 4$, jei $m>0$, $n>0$ ir $m\cdot n=1$.

Sprendimas. $A=\frac{(m+1)(n+1)}{mn}=mn+m+n+1=m+n+2\ge 2\sqrt{mn}+2=4$, nes $m+n\ge 2\sqrt{mn}$.

5. Įrodykite, kad skaičius $A=40\cdot 66\cdot 96+53\cdot 83\cdot 109$ nėra pirminis (natūralusis skaičius vadinamas pirminiu, jeigu jis dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto; skaičius 1 nelaikomas pirminiu).

Sprendimas. Pastebėkime, kad $40+109=66+83=96+53=149$. Tegu $40=a$, $66=b$, $96=c$. Tuomet $a+109=b+83=c+53=149 \Rightarrow 53=149-c$, $83=149-b$, $109=149-a$, $A=abc+(149-a)(149-b)(149-c)$. Atlikę veiksmus gautume, kad kiekvienas dėmuo turi daugiklį 149. Todėl skaičius A dalijasi iš 149, t. y. *nėra pirminis*.

6. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio paskutinįjį skaitmenį, lygų 6, perkėlus į pradžią, jis padidėja 4 kartus.

Sprendimas. Pažymėkime šį skaičių $A=\overline{x_1x_2x_3...x_{k-1}x_k6}$. Tuomet $4A=\overline{6x_1x_2x_3...x_{k-1}x_k}$. Visus skaitmenis gausime samprotaudami taip:

$4\cdot 6=24\Rightarrow x_k=4$; $4x_k+2=4\cdot 4+2=18\Rightarrow x_{k-1}=8$;

$4x_{k-1}+1=4\cdot 8+1=33\Rightarrow x_{k-2}=3$; $4x_{k-2}+3=4\cdot 3+3=15\Rightarrow x_{k-3}=5$;

$4x_{k-3}+1=4\cdot 5+1=21\Rightarrow x_{k-4}=1$; $4x_{k-4}+2=4\cdot 1+2=6\Rightarrow x_{k-5}=6$.

Ats. $A=153846$.

7. Kiek mažiausiai dėmenų gali būti, kad galiotų lygybė *STOK*+*STOK*+…+*STOK*=*ĖĖĖĖĖĖ* (čia skirtingos raidės reiškia skirtingus skaitmenis)?

Sprendimas. Kadangi $111111=13\cdot 8547$, tai lygybė įmanoma su 13 dėmenų ir galima imti *Ė*=1, *STOK*=8547. Jei dėmenų būtų 12, tai *Ė* būtų lyginis, bet 222222:12 jau penkiaženklis. Jeigu dėmenų būtų 11 arba mažiau vėl gautume penkiaženklį skaičių, nes 111111:11=10101.

Ats. 13.

8. Mokiniui buvo pateikta spręsti 20 uždavinių. Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį mokinys gauna 8 taškus, už kiekvieną neteisingai spręstą - atimami 5 taškai. Už nespręstus uždavinius taškai neskiriami ir neatimami. Mokinys surinko 13 taškų. Kiek uždavinių jis išsprendė?

Sprendimas. Pažymėkime teisingai išspręstų uždavinių skaičių x, o neteisingai spręstų - y. Tuomet turi galioti lygybė $8x-5y=13$, kai $x+y\le 20$. Tikrindami galimas kintamųjų x ir y reikšmes, gausime, kad tik $x=6$ (tuomet y= 7) yra šio uždavinio sprendinys.

Ats. 6

9. Verslininkas Jonas Rietaviškis kiekvieno mėnesio pabaigoje užsirašo pajamų ir išlaidų skirtumą (saldo) S_i, $i=1, 2, ..., 12$. Ar gali atsitikti taip, kad bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių S_i suma yra neigiama, o visų jų suma $S_1+S_2+...+S_{12}$ - teigiama?

Ats. Gali, pavyzdžiui, $2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2$.

10. Iš taško M žmogus nuėjo 5 km į pietus, po to - 5 km į vakarus, o nuėjęs dar 5 km į šiaurę, atsidūrė tame pačiame taške M. Kokie Žemės rutulio taškai turi šią savybę?

Ats. Šiaurės ašigalio taškas ir pietų pusrutulio lygiagrečių, kurios yra 5 km atstumu į šiaurę nuo $\frac{5}{n}$ ilgio lygiagrečių ($n\in \mathrm{N}$), taškai.

Rietavo pirmoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

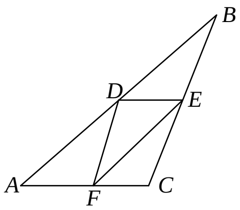
Rietavas, 2002 m. sausio 26 d.

Užduoties vyresniųjų klasių moksleiviams **sprendimai**

1. Verslininkas Jonas Rietaviškis kiekvieno mėnesio pabaigoje užsirašo pajamų ir išlaidų skirtumą (saldo) S_i, $i = 1, 2, ..., 12$. Ar gali atsitikti taip, kad bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių S_i suma yra neigiama, o visų jų suma $S_1 + S_2 + ... + S_{12}$ - teigiama?

   Ats. Gali, pavyzdžiui, $2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2$.

2. Trikampio kraštinės yra 29, 25 ir 6 cm ilgio. Per kraštinių vidurio taškus nubrėžtas apskritimas. Raskite šio apskritimo spindulį.



Sprendimas. Sujungę duotojo trikampio kraštinių vidurio taškus, gauname naują trikampį su perpus trumpesnėmis kraštinėmis. Vadinasi, turime rasti apie trikampį *DEF* apibrėžto apskritimo spindulį. *R*. Pasinaudosime formule $R = \dfrac{abc}{4S}$, kai $a = FE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{29}{2}$, $b = FD = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{25}{2}$, $c = DE = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. Kadangi pagal Herono formulę trikampio *DEF* plotas yra $S = 15$, tai $R = \dfrac{29 \cdot 25 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 15} = \dfrac{145}{16} = 9\dfrac{1}{16} = 9{,}0625$ cm.

3. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}$?

   Sprendimas. Iš lygties išreiškę kintamąjį *y*, gausime $y = 10 + \dfrac{100}{x-10}$. Vadinasi, turime suskaičiuoti, kiek sveikųjų (teigiamų ir neigiamų) daliklių ($x - 10 \neq 10$) turi skaičius $100 = 2^2 \cdot 5^2$.Tokių daliklių iš viso yra 17, taigi ir duotoji lygtis turi 17 sveikųjų sprendinių.

4. Kokie skaičiaus $25^{2001} + 76^{2002}$ paskutinieji du skaitmenys?

   Sprendimas. Kadangi $25^{2001} = ...25$, $76^2 = 5776$, $76^{2002} = (76^2)^{1001}$, $5776^{1001} = ...76$, tai $...25 + ...76 = ...01$.

   Ats. Paskutinieji du skaitmenys yra 01.

5. Kiek yra triženklių skaičių su nelygiais nuliui skaitmenimis, kurių vienas skaitmuo yra lygus kitų dviejų sumai?

   Sprendimas. Nagrinėkime skaičius su nurodytomis savybėmis.. Jei tokio skaičiaus tik du skaitmenys skirtingi, tai perstatinėdami juos gausime dar du triženklius skaičius, pavyzdžiui, jei imtume 211, tai turėtume dar ir 121, ir 112. Jei tokio triženklio skaičiaus visi skaitmenys skirtingi, tai gausime dar penkis, arba iš viso 6 skaičius, pavyzdžiui, iš 321 gausime dar ir 312, 231, 213, 132 ir 123.

O dabar perrenkame tokius skaičius pagal visas galimas sumas, t. y. nuo 2 iki 9. Kai suma 2 , tai yra tik skaičius 211 su savo perstatiniais - 3 būdai. Kai suma 3, gali būti grupė 321 - 6 būdai. Kai suma 4, gali būti 413 (6 būdai) ir 422 (3 būdai). Kai suma 5, gali būti 413 (6 būdai) ir 423 (6 būdai). Kai suma 6, gali būti 615 (6 būdai), 624 (6 būdai), ir 633 (3 būdai). Panašiai ir toliau.

Suma 7 - 716 (6), 725 (6), 734 (6);

Suma 8 - 817 (6), 826 (6), 835 (6), 844 (3);

Suma 9 - 918 (6), 927 (6), 936 (6), 945 (6).

Iš viso tokių skaičių bus 3+6+9+12+15+18+21+24= $27\cdot 4=108$.

Ats. 108.

6. Keliais nuliais baigiasi skaičius 100! ?

*Sprendimas.*Sandaugoje $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot .... \cdot 99\cdot 100$ daugiklis 5 įeina 24 laipsniu. Iš tikrųjų: iš 5 dalijasi 20 šios skaičių eilės skaičių, iš 25 dalijasi 4 skaičiai. Kadangi kiekvienas penketas, sudaugintas su dvejetu duoda 10 (dvejeto laipsnis šioje sandaugoje neabejotinai didesnis už 24), tai skaičius 100!. baigiasi 24 nuliais.

Ats. 24.

7. Įrodykite, kad skaičius $A=\underbrace{111...1}_{5n}$, $n\in \mathrm{N}$, dalijasi iš 41.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $11111=41\cdot 271$. Kai $n\geq 1$, galioja lygybė $\underbrace{111111...11111}_{5n}=11111\cdot (10^{5(n-1)}+10^{5(n-2)}+...+10^{5\cdot 0})$. Todėl skaičius A dalijasi iš 41.

8. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Sprendimas. $(2-\sqrt{x-1})^2=x+3-4\sqrt{x-1}$, $(3-\sqrt{x-1})^2=x+8-6\sqrt{x-1}$.

Todėl turime spręsti lygtį $|2-\sqrt{x-1}|+|3-\sqrt{x-1}|=1$. Taikydami intervalų metodą intervaluose $(-\infty;5)$, $[5;10]$, $(10;+\infty)$, gausime, kad visi intervalo $[5;10]$ taškai tenkina lygtį.

Ats. $[5;10]$.

9. Lietaus šalies gyventojų abėcėlėje yra tik trys raidės **L**, **I** ir **S**. Žodžiai iš jų sudaromi taip, kad trys vienodos raidės negali būti parašytos greta. Kiek šešiaraidžių žodžių yra Lietaus šalies gyventojų kalboje?

Sprendimas. Svarbu pasirinkti, pagal ką mes rūšiuosime - rūšiuosime pagal dviejų vidurinių raidžių junginius, kurie gali būti tokie:**LL**, **II**, **SS**, **LI**, **IL**, **LS**, **SL**, **IS** ir **SI** - iš viso devynios galimybės.

Pirmųjų trijų "vienodų" dviraidžių iš bet kurios pusės gali būti bet kuris iš šešių dviraidžių Jei tai LL, tai iš kairės pusės gali būti bet kuris iš **II**, **SS**, **LI**, **LS**, **IS** ir **SI**,o iš dešinės - **II**, **SS**, **IL**, **SL**, **IS** ir **SI** - tai duoda $6\cdot 6=36$ žodžius su viduryje esančiu **LL.** Panašiai yra ir su **II** bei **SS** - taigi su vienodais vidurio dviraidžiais yra $36\cdot 3=108$ žodžiai.

Jei vidurio dviraidžiai yra skirtingi, tai iš kiekvienos pusės gali eiti po 8 iš likusių dviraidžių - iš viso $6\cdot 8\cdot 8=384$ žodžiai.

Todėl Lietaus šalies gyventojų kalboje yra 384+108=492 skirtingi šešiaraidžiai žodžiai.

Ats. 492.

10. Šešių skirtingų skaičių rinkinys yra toks, kad kiekvieną jo skaičių pakeitus likusiųjų suma vėl gaunamas tas pats skaičių rinkinys.
    1) Raskite nors vieną tokį skaičių rinkinį.
    2) Įrodykite, kad tokio rinkinio visų skaičių sandauga yra neigiama.

    Ats. Toks skaičių rinkinys yra $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$