Rietavo antroji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

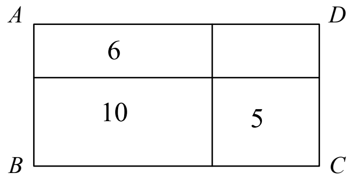
Rietavas, 2003 m. sausio 25 d.

Užduoties jaunesniųjų klasių moksleiviams sprendimai

1. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra *a* ir *b*, o įžambinė lygi *c*. Įrodykite nelygybę $a+b \le c\sqrt{2}$.

Įrodymas. Iš Pitagoro teoremos $a^2+b^2=c^2$. Tuomet: $(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow 2ab \le c^2$, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \le 2c^2$. Iš abiejų nelygybės pusių ištraukę kvadratinę šaknį, gauname nelygybę $a+b \le c\sqrt{2}$.

2. Stačiakampis *ABCD* suskaidytas į keturias dalis, kaip pavaizduota brėžinyje. Žinomi trijų dalių plotai: 6,10 ir 5 cm^2. Apskaičiuokite stačiakampio *ABCD* plotą.



Sprendimas. Nežinomos dalies plotą pažymėkime *x*. Tokiu būdu padalijus stačiakampį į 4 dalis, dalių plotai yra proporcingi: $\frac{6}{10} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 3$. Todėl viso stačiakampio plotas $S = 6+10+5+3 = 24$.

Ats.: 24 cm^2

3. Ar galima kvadrato formos stalą, kurio kraštinės ilgis 90 cm, visiškai uždengti dviem skritulio formos staltiesėmis, kurių skersmuo 1 m?

Sprendimas. Kvadrato įstrižainė lygi $90\sqrt{2} \approx 127{,}279$, todėl viena staltiese stalo neuždengsime. Dengiant stalą dviem staltiesėmis, kiekviena staltiesė turėtų uždengti po pusę kvadrato. Tačiau $90^2 + 45^2 = 10125 > 100^2$, todėl viena staltiesė negali uždengti pusės stalo.

Ats.: Ne.

4. Išspręskite lygtį $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = 144$.

Sprendimas. Pertvarkome lygtį: $(x^2+x-2)(x^2+x-12) = 144$. Pažymėję $x^2+x-2 = y$, gauname: $y(y-10) = 144 \Rightarrow y^2 - 10y - 144 = 0 \Rightarrow y_1 = 18, y_2 = -8$. Toliau išsprendžiame dvi lygtis $x^2+x-2=18$ ir $x^2+x-2=8$. Pirmosios sprendiniai yra -5 ir 4, o antroji sprendinių neturi.

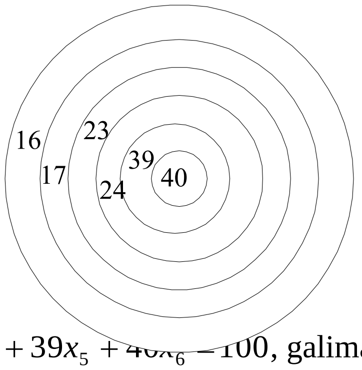
Ats.: -5, 4.

5. Raskite visus lygties $9x+2 = y(y+1)$ sprendinius $(x; y)$ su sveikaisiais skaičiais *x* ir *y*.

Sprendimas. $x = \frac{y(y+1)-2}{9} = \frac{(y-1)(y+2)}{9}$. Kai $y \in Z$, skaičius $(y-1)(y+2)$ turi dalytis iš 9. Kad $(y-1)(y+2)$ dalytųsi iš 9, užtenka reikalauti, kad $y-1$ dalytųsi iš 3 – tuomet ir $(y-1)+3 = y+2$ dalysis iš 3. Taigi $y-1 = 3k, k \in Z \Rightarrow y = 3k+1$, $x = \frac{3k(3k+3)}{9} = k(k+1)$.

Ats.: $(k(k+1); 3k+1),\ k \in Z$.

6. Kiek kartų reikia pataikyti į šį taikinį norint surinkti lygiai 100 taškų?
Pataikius į centrą, įskaitoma 40 taškų, pataikius į pirmąjį žiedą – 39 taškai, į antrąjį – 24 taškai, toliau atitinkamai - 23, 17 ir 16 taškų.



Sprendimas. Nuosekliai paanalizavus lygtį $16x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 24x_4 + 39x_5 + 40x_6 = 100$, galima įsitikinti, kad: $x_6 = 0, x_5 = 0, x_4 = 0, x_3 = 0$. Lygtis $16x_1 + 17x_2 = 100$ turi sprendinį $(2; 4)$. Iš tikrųjų $16 \cdot 2 + 17 \cdot 4 = 100$. Žinoma, šį sprendinį galima ir atspėti.
Ats.: 6

7. Marytė pasiūlė Petriukui tokį žaidimą su sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 5. Marytė pasirenka skaičių ir pasako jį Petriukui. Petriukas prie šio skaičiaus prideda kurį nors, kad gautų pirminį skaičių ir pasako rezultatą Marytei. Ji vėl sukonstruoja pirminį skaičių (pridėdama kurį nors skaičių nuo 1 iki 5) ir pasako jį Petriukui. Žaidimas tęsiasi kol tokiu būdu nebebus įmanoma sudaryti pirminio skaičiaus. Laimi tas, kieno pirminis skaičius buvo paskutinis. Kaip turi žaisti Marytė, kad laimėtų žaidimą?
Pastaba. **Pirminiais skaičiais** vadinami natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir vieneto. Skaičius 1 nelaikomas pirminiu.

Sprendimas. Marytė turi pasirinkti skaičių 5. Tuomet Petriukas gali pasirinkti tik 2 (5+2=7), Marytė – 4 (7+4=11), Petriukas – 2 (11+2=13), Marytė – 4 (13+4=17), Petriukas – 2 (17+2=19), Marytė – 4 (19+4=23). Toliau Petriukas iš intervalo [1; 5] nebegalės surasti skaičiaus, kurį pridėjęs gautų pirminį skaičių. Galima nustatyti, kad kiti Marytės sprendimai neužtikrina Marytės pergalės.

8. Tarkime, $m = \overline{xyz}$ ir $n = \overline{uvw}$ yra skirtingi triženkliai natūralieji skaičiai. Iš jų sudaryti du šešiaženkliai skaičiai: $\overline{uvwxyz}$ ir $\overline{xyzuvw}$. Įrodykite, kad šių skaičių skirtumas nesidalija iš 1996.

Įrodymas. Kadangi $\overline{uvwxyz} = 1000n + m$, $\overline{xyzuvw} = 1000m + n$, tai šių skaičių skirtumas S lygus: $S = 1000n + m - (1000m + n) = 999(n - m) = 3^3 \cdot 37 \cdot (n - m)$ (37 – pirminis skaičius). Skaičius 1996 išskaidomas taip: $1996 = 2^2 \cdot 499$ (499 – pirminis skaičius). Kad S dalytųsi iš 1996, reikia, kad $n - m$ dalytųsi iš 1996. Tačiau taip būti negali, nes didžiausia galima skirtumo reikšmė yra $999 - 100 = 899$.

9. Skaičiai m ir n yra tarpusavyje pirminiai (neturi bendrų daliklių, didesnių už vienetą), o trupmena $\dfrac{3n - m}{5n + 2m}$ yra suprastinama. Raskite skaičių, iš kurio galima šią trupmeną suprastinti?

Sprendimas. Kadangi trupmena $\dfrac{3n - m}{5n + 2m}$ suprastinama, tai yra tokie natūralieji skaičiai $k > 1$, p ir q, kad $3n - m = kp$, $5n + 2m = kq$. Iš čia $11n = k(2p + q)$, $11m = k(3q - 5p)$, t.y. $11n$ ir $11m$ dalijasi iš k. Kadangi m ir n neturi bendrų daliklių, tai 11 turi dalytis iš k. Tačiau 11 yra pirminis skaičius ir $k > 1$, todėl $k = 11$.
Ats.: 11.

10. Ar skaičių aibėje {1, 2, 3, ……, 14, 15} galima rasti tokius du skaičius, kurių sandauga lygi visų likusiųjų skaičių sumai?

Sprendimas. Visų skaičių suma lygi 120. Jeigu du tokie skaičiai m ir n egzistuotų, turėtų galioti lygybė $mn = 120 - (m + n)$. Įsitikiname, kad m ir n : 1) abu negali būti nelyginiai; 2) negali būti vienas lyginis, kitas nelyginis. Taigi m ir n galėtų būti abu lyginiai. Tegu $m = 2k, n = 2l$. Tada $2kl = 60 - (k + l)$. Iš čia išplaukia, kad k ir l gali būti abu nelyginiai arba abu lyginiai. Patikrinę visus tokius k ir l reikšmių rinkinius, įsitikiname, kad tokių dviejų skaičių, kaip reikalauja sąlyga, negali būti.
Ats.: Ne.

Rietavo antroji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2003 m. sausio 25 d.

Užduoties vyresniųjų klasių moksleiviams sprendimai

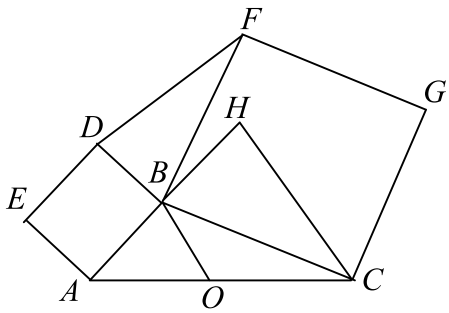
1. Kiekvienas šios lentelės skaičius m turi koordinates $(x; y)$; čia x yra eilutės, kuriai priklauso m, pirmasis skaičius iš kairės, o y yra stulpelio, kuriam priklauso m, viršutinis skaičius. Taigi kiekvienas lentelės skaičius apibūdinamas savo koordinatėmis. Pavyzdžiui, skaičiaus 12 koordinatės yra (10;2), o skaičiaus 23 koordinatės yra (17;9). Raskite skaičiaus 2003 koordinates.

					1					
				2	3	4				
			5	6	7	8	9			
		10	11	12	13	14	15	16		
	17	18	..	..	..	..	..	..	..	
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Sprendimas. Šioje n “aukštų” skaičių piramidėje yra iš viso $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ skaičių. n-oji eilutė prasideda skaičiumi $(n-1)^2+1$, o baigiasi skaičiumi n^2, o jos vidurinis skaičius lygus $\frac{(n-1)^2+1+n^2}{2}=n^2-n+1$. Kadangi $44^2<2003<45^2$, tai 2003 yra 45-oje eilutėje, kuri prasideda skaičiumi 1937 ir baigiasi skaičiumi 2025, vidurinis skaičius yra 1981. Vadinasi, skaičius 2003 yra 23-ame stulpelyje, skaičiuojant nuo vidurinio skaičiaus į dešinę ($2003-1981=22$). Šio stulpelio viršutinis skaičius yra $23^2=529$. Taigi skaičiaus 2003 koordinatės yra (1937, 529).

Ats.: (1937, 529).

2. Iš trikampio ABC viršūnės B išvesta pusiaukraštinė BO, kurios ilgis 5 cm. Ant kraštinės AB nubrėžtas kvadratas $AEDB$, o ant kraštinės BC - kvadratas $BFGC$. Raskite atkarpos DF ilgį.



Sprendimas. Pratęskime atkarpą AB iki taško H taip, kad $AB=BH$ ir nubrėžkime atkarpą HC. Kadangi $AB=BD=BH$, $BF=BC$ ir $\angle DBF=\angle HBC$, tai trikampiai DBF ir HBC lygūs. Tuomet $DF=HC=10\,cm$, nes BO yra trikampio AHC vidurinė linija.

Ats.: 10 cm.

3 Lygiašoniame trikampyje, kurio pagrindas a, o šoninė kraštinė b, viršūnės kampas lygus 20^0. Įrodykite, kad $a^3+b^3=3ab^2$.

Įrodymas. $\frac{a}{2b}=\sin 10^0$. Kita vertus, teisinga lygybė $\sin 30^0=3\sin 10^0-4\sin^3 10^0$ Todėl

$$\frac{1}{2}=3\cdot\frac{a}{2b}-4\cdot\left(\frac{a}{2b}\right)^3 \Rightarrow \quad a^3+b^3=3ab^2.$$

4. Keliais vienodo spindulio skrituliais galima visiškai uždengti dvigubai ilgesnio spindulio skritulį?

Sprendimas. Pažymėkime dengiamo skritulio spindulį *R*. Įbrėžkime į šį skritulį taisyklingąjį šešiakampį. Jo kraštinės ilgis – taip pat *R*. Nubrėžę 6 skritulius su centrais šešiakampio kraštinių vidurio taškuose ir spinduliais *R* ir vieną tokį skritulį dengiamojo centre, šie septyni skrituliai visiškai uždengs didįjį skritulį.

Ats.: 7.

5. Išspręskite lygtį $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Sprendimas. Padaliję abi lygties puses iš *x*, gauname lygtį $\frac{4}{4x+\frac{7}{x}-8}+\frac{3}{4x+\frac{7}{x}-10}=1$.

Pažymėkime $4x+\frac{7}{x}=y$. Tuomet: $\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1 \Rightarrow y_1=16, y_2=9$. Lygtis $4x+\frac{7}{x}=16$ turi du sprendinius $x_1=3{,}5$ ir $x_2=0{,}5$, o lygtis $4x+\frac{7}{x}=9$ sprendinių neturi.

Ats.: 3,5; 0,5.

6. Apskaičiuokite sumą $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+....+100\cdot 2^{99}$.

Sprendimas.

$$
\begin{aligned}
S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{99} \\
+ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{99} \\
+ 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{99} \\
+ 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{99} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ 2^{99}
\end{aligned}
$$

$$= 2^{100}-1+2^{100}-2+2^{100}-4+.....+2^{100}-2^{99}=100\cdot 2^{99}-(1+2+4+.....+2^{99})=98\cdot 2^{100}+1$$

.

Ats.: $98\cdot 2^{100}+1$.

7. Raskite visus natūraliuosius skaičius x, kurių skaitmenų sandauga lygi $x^2-10x-22$.

Sprendimas. Skaitmenų sandauga neneigiama: $x^2-10x-22\geq 0$. Iš čia $x>5+\sqrt{47}>11$. Kita vertus, natūraliojo skaičiaus skaitmenų sandauga visuomet neviršija paties skaičiaus, t.y. $x^2-10x-22\leq x$. Iš čia gauname, kad $x<13$. Vadinasi, $x=12$.

Ats.: 12.

8. Iš skaičių, kurie dalijasi iš 17, raskite tokį, kurio skaitmenų suma mažiausia.

Sprendimas. Skaičius 1000…..0 nesidalija iš 17. Vadinasi, skaitmenų suma didesnė už 1. Skaičiaus $102=17\cdot 6$ skaitmenų suma lygi 3. Taigi reikia nustatyti, ar yra toks skaičius, kuris dalijasi iš 17 ir jo skaitmenų suma lygi 2. Dalijant pavidalo 100000…….01 skaičių iš 17, gausime kad toks skaičius yra: $100000001=17\cdot 5882353$.

Ats.: 100000001.

9. Su dviem nelygiais nuliui natūraliaisiais skaičiais *m* ir *n* atlikti tokie veiksmai: 1) jie sudėti; 2) jie sudauginti; 3) iš didesniojo atimtas mažesnysis; 4) didesnysis padalytas iš mažesniojo. Sudėjus visus keturis rezultatus, gautas skaičius 243. Raskite natūraliuosius skaičius *m* ir *n*.

Sprendimas. Pažymėkime ieškomuosius skaičius *m* ir *n*, tegu $m \geq n$. Tuomet $m + n + mn - n + \frac{m}{n} = 243 \Rightarrow \frac{m}{n} \cdot (n+1)^2 = 243$. Čia $\frac{m}{n}$ - sveikasis skaičius. Kadangi $243 = 3^5$, tai $(n+1)^2$ gali būti:

1) $\frac{m}{n} = 243$(toks atvejis negalimas, nes tuomet išeitų, kad $n = 0$);

2) $\frac{m}{n} = 27 \Rightarrow n = 2, m = 54$;

3) $\frac{m}{n} = 3 \Rightarrow n = 8, m = 24$.

Ats.: 1) $m = 54, n = 2$; 2) $m = 24, n = 8$.

10. Kapitonas sako savo sūnui: "Pirmoje kajutėje keliauja ponas Jonas ir dvi jo dukros. Jų visų metų sandauga lygi 2450, o jų metų suma keturis kartus didesnė už tavo amžių. Ar gali pasakyti, koks šių trijų keleivių amžius". Sūnus, truputį pagalvojęs, atsakė: "Negaliu, nes trūksta vieno duomens". Kapitonas pridūrė: "Jonas 5 kartus vyresnis už vieną iš savo dukrų". Tuomet sūnus atsakė į užduotąjį klausimą. Kaip jis apskaičiavo pono Jono ir jo dukterų amžių?

Sprendimas. Pažymėkime pono Jono amžių j metų, o dukrų - m ir n metų. Tuomet galios lygybė $jmn = 2450$, be to skaičius $j + m + n$ turi dalytis iš 4. Kadangi $2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, tai patikrinus visus galimus *j*, *m* ir *n* reikšmių rinkinius, įsitikinama, kad vienintelis variantas - $j = 35$, *m*=10 *n*=7 (Žinoma, *m* ir *n* reikšmės gali būti sukeistos vietomis).

Ats.: Ponui Jonui 35 metai, dukroms – 7 ir 10 metų.