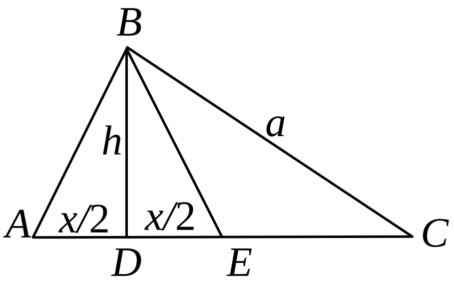
Rietavo trečioji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2004 m. sausio 24 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių moksleiviams - sprendimai

1. Iš trikampio *ABC* viršūnės *B* išvestos aukštinė *BD* ir pusiaukraštinė *BE.* Jos kampą *B* dalija į tris lygius kampus. Raskite trikampio *ABC* kampų dydžius.

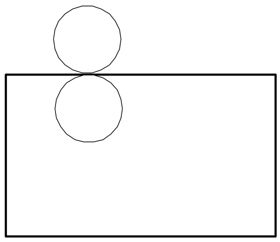
   Sprendimas.



Pažymėkime $AE = x$, $BC = a$ $BD = h$. Tuomet $AD = DE = x/2$, $EC = x$. Pagal pusiaukampinės savybę $\frac{h}{a} = \frac{x/2}{x} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \Rightarrow \langle BCA = 30^0$.

Tuomet $\langle ABC = 90^0$, $\langle BAC = 60^0$.

2. Du apskritimai, kurių ilgiai lygūs 0,5 m (žr. brėžinį), rieda stačiakampio kraštinėmis – vienas išore, o kitas - vidumi. Stačiakampio ilgis - 2m, plotis - 1m. Kiek apsisukimų padarys kiekvienas apskritimas, nuriedėjęs visą stačiakampio perimetrą?



Sprendimas. Išorinis apskritimas padarys (6m:0,5)+1=12+1=13 apsisukimų. Vidiniam apskritimui reikės nuriedėti $8R$ ($R = \frac{0,5}{2\pi}$ - apskritimo spindulys) trumpesnį kelią. Todėl vidinis apskritimas padarys $(6 - 8 \cdot \frac{0,5}{2\pi}) : 0,5 = (6 - \frac{2}{\pi}) : 0,5 \approx 10,9$ apsisukimų.

3. Duotas aritmetinis reiškinys $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$.
   a) Skliaustelius sudėliokite taip, kad jis būtų lygus 50.
   b) Kaip reikia sudėlioti skliaustelius, kad reiškinys įgytų mažiausią galimą reikšmę?
   c) Kaip reikia sudėlioti skliaustelius, kad reiškinys įgytų didžiausią galimą reikšmę?

   Sprendimas.

   a) $4 \cdot 12 + 18 : (6 + 3) = 50$. b) $(4 \cdot 12 + 18) : (6 + 3) = \frac{22}{3}$. c) $4 \cdot (12 + 18 : 6 + 3) = 72$.

4. Ratu surašyti 20 skaičių. Kiekvienas iš jų lygus abiejų savo kaimynų sumai. Apskaičiuokite visų tų dvidešimties skaičių sumą.

Sprendimas. Pažymėkime ieškomąją sumą *S*. Kiekvienam skaičiui užrašykime lygybę, kurios kairiojoje pusėje pats skaičius, o dešiniojoje – jo kaimynų suma. Sudėkime šias visas 20 lygybių panariui. Gausime lygybę, kurios kairioji pusė lygi *S*, o dešinioji – 2*S*. Taigi $S = 2S \Rightarrow S = 0$.

Ats. 0.

5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kuris, nubraukus jo pirmąjį skaitmenį, sumažėja 57 kartus.

Sprendimas. Tarkime, kad ieškomasis skaičius sudarytas iš *n*+1 skaitmenų. Užrašykime jį pavidalu $10^n x + y$; čia x yra pirmas šio skaičiaus skaitmuo, o y – skaičius, gautas nubraukus duotojo skaičiaus pirmą skaitmenį. Pagal sąlygą $10^n x + y = 57y$. Iš čia $10^n x = 56y$. Kadangi 56 dalijasi iš 7, tai ir x turi dalytis iš 7. Tačiau x - skaitmuo, todėl $x=7$. Tuomet $y=\frac{10^n}{8}\Rightarrow n=3,\ \ y=125\Rightarrow 10^n x+y=7125.$

Ats. 7125.

6. Milijono natūraliųjų skaičių sandauga lygi milijonui. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti šių skaičių suma?

Sprendimas. Jei tarp šių skaičių yra skirtingi didesni už vienetą skaičiai a ir b, tai vietoje vieno iš jų įrašykime sandaugą $a\cdot b$, o vietoje kito – vienetą. Tuomet sandauga nepakito, o suma padidėjo, nes $(a-1)(b-1)>0\Rightarrow ab+1>a+b$. Vadinasi, suma bus didžiausia, kai vienas skaičius bus milijonas, o visi kiti – vienetai. Jų suma lygi 1999999.

Ats. 1999999.

7. Į kvadrato 5×5 kiekvieną langelį įrašyti skaičiai 0 arba 1 taip, kad bet kurio jo 2×2 kvadratėlio trys skaičiai būtų vienodi. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti visos 5×5 lentelės skaičių suma?

Sprendimas. Nagrinėkime 4×4 kvadratą, esantį duotojo kvadrato kairiajame viršutiniame kampe. Suskaidykime jį į keturis nepersidengiančius 2×2 kvadratus. Pagal sąlygą kiekvieno iš šių kvadratėlių skaičių suma neviršija 3. Taigi visų keturių – neviršija 12. Visos 5×5 lentelės skaičių suma neviršys $12+9=21$. Tokios lentelės pavyzdys pateiktas.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Ats. 21.

8. Kelionė iš uosto A į uostą B trunka 15 parų. Kiekvieną dieną 12 valandą iš uosto A į uostą B ir tuo pačiu metu – iš B į A išplaukia garlaivis. Kiek garlaivis, išplaukęs iš uosto A, sutiks garlaivių, plaukiančių iš B į A?

Sprendimas. Išplaukdamas iš uosto A, garlaivis sutiks garlaivį, išplaukusį iš uosto B prieš 15 parų, o atplaukęs į uostą B po 15 parų, sutiks išplaukiantį garlaivį. Taigi garlaivis, išplaukęs iš uosto A, susitiks garlaivių tiek, kiek intervale $[-15;15]$ yra sveikųjų skaičių, t.y. 31.

Ats. 31.

9. Berniukas turi po vienodą skaičių seserų ir brolių. Jo sesuo turi du kartus daugiau brolių negu seserų. Kiek šioje šeimoje yra mergaičių ir kiek berniukų?

Sprendimas. Tarkime, šeimoje yra b berniukų ir m mergaičių. Tuomet $\begin{cases} b-1=m, \\ 2(m-1)=b \end{cases}$. Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname $b=4,\ m=3$.

Ats. Mergaičių – 3, berniukų – 4.

10. Laikrodžio rodyklės rodo pirmą valandą dienos. Raskite artimiausią laiko momentą, kai rodyklės sutaps.

Sprendimas. Per 60 minučių valandinė rodyklė pasisuka $\frac{1}{12}$ apskritimo dalį, o minutinė – apsisuka visą apskritimą. Vadinasi per 1 minutę kampas tarp valandinės ir minutinės rodyklės sumažės $\frac{1}{60}-\frac{1}{12\cdot 60}=\frac{11}{12\cdot 60}$ dalimi apskritimo. Pirmą valandą kampas tarp valandinės ir minutinės rodyklės yra $\frac{1}{12}$ apskritimo dalis. Todėl rodyklės pirmą kartą sutaps po $\frac{1}{12}:\frac{11}{12\cdot 60}=\frac{60}{11}$ minutės, t.y. 13 valandą 5 minutės $27\frac{3}{11}$ sekundės.

Rietavo trečioji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2004 m. sausio 24 d.

Užduotis vyresniųjų klasių moksleiviams - sprendimai

1. Ar yra toks natūralusis skaičius *n*, su kuriuo skaičiaus n^{2004} paskutiniai keturi skaitmenys yra 2004?

Sprendimas. Tarkime, kad toks skaičius yra. Kadangi pagal sąlygą skaičiaus n^{2004} paskutinis skaitmuo yra 4, tai šis skaičius lyginis. Taigi lyginis yra ir pats skaičius *n*, t.y. $n = 2k$ su tam tikru sveikuoju *k*. Pagal sąlygą skirtumo $n^{2004} - 2004$ paskutiniai keturi skaitmenys yra nuliai. Vadinasi, šis skaičius dalijasi iš 10^4, taigi ir iš 2^4. Kita vertus, skaičius $(2k)^{2004} = 2^{2004} \cdot k^{2004}$, žinoma, dalijasi iš 2^4, tačiau skaičius $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ nesidalija iš 2^4. Gavome prieštaravimą – taigi skaičiaus *n*, tenkinančio uždavinio sąlygas, nėra.

Ats. nėra.

2. Koks triženklis skaičius yra lygus jo vienetų skaitmens kubui?

Sprendimas. Ieškomąjį skaičių pažymėkime $\overline{abc}$ $(a \neq 0)$. Tuomet $100a + 10b + c = c^3$ arba $10(10a + b) = (c-1) \cdot c \cdot (c+1)$. Čia $c \neq 0$ (priešingu atveju gautume $a = 0, b = 0$ - skaičius nebūtų triženklis). Iš lygybės matome, kad jos kairioji pusė dalijasi iš 10, taigi bent vienas iš dešiniosios pusės daugiklių turi dalytis iš 10 arba iš 5. Tačiau *c* gali įgyti tik reikšmes nuo 1 iki 9. Todėl arba $c+1=10$, arba $c=5$, arba $c-1=5$. Atvejis $c+1=5$ negalimas, nes tuomet skaičius $(5-2)\cdot(5-1)\cdot 5 = 60$ nėra triženklis. Panagrinėkime kiekvieną atvejį atskirai:

1) $c+1=10 \Leftrightarrow c=9 \Leftrightarrow \overline{abc}=729$; 2) $c=5 \Leftrightarrow \overline{abc}=125$; 3) $c-1=5 \Leftrightarrow c=9 \Leftrightarrow \overline{abc}=729$.

Atsakymą galima gauti ir tiesiog patikrinus visus galimus atvejus.

Ats. 216, 125, 729.

3. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99999 surašyti iš eilės ilgoje popieriaus juostoje. Gautas skaičius yra 1234567891011121314…….999979999899999. Raskite šio skaičiaus skaitmenų sumą.

Sprendimas. Pastebėkime, kad skaičių 1 ir 99998 skaitmenų suma lygi 45. Tokią pat skaitmenų sumą turi skaičių 2 ir 99997 suma, taip pat skaičių 3 ir 99996 suma, ir t.t. Tokių porų (turinčių skaitmenų sumą, lygią 45) iš viso bus $99998 : 2 = 49999$. Paskutiniųjų penkių skaitmenų 99999 suma taip pat 45. Todėl viso skaičiaus-milžino skaitmenų suma lygi $45 \cdot 50000 = 2250000$.

Ats. 2250000.

4. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Sprendimas. Kiekvienoje trupmenoje panaikinę iracionalumą vardiklyje, gausime sumą

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - 1 = 9.$$

Ats. 9.

5. Ar galima kvadratą padalyti į tris keturkampius taip, kad į kiekvieną iš jų būtų galima įbrėžti apskritimą (apskritimų spinduliai nebūtinai vienodi)?

Sprendimas. Tegu kvadrato *ABCD* kraštinės ilgis *a* (žr. 1 pav.). Į lygius stačiuosius trikampius *ABC* ir *ADC* įbrėžkime apskritimus su centrais O_1 ir O_2. Šių apskritimų skersmens ilgis yra $d = (2-\sqrt{2})a$. Kvadrato įstrižainėje pasirinkime tašką *F*, nutolusį atstumu *d* ir nuo kraštinės *BC*, ir nuo kraštinės *CD*. Iš šio taško nuleidę statmenis *FG* ir *FH* į kvadrato kraštines *AD* ir *AB* atitinkamai, gausime, kad apskritimai su centrais O_1 ir O_2 yra įbrėžti į trapecijas *HBCF* ir *GFCD*. Tuomet belieka įbrėžti apskritimą į kvadratą *AHFG*.

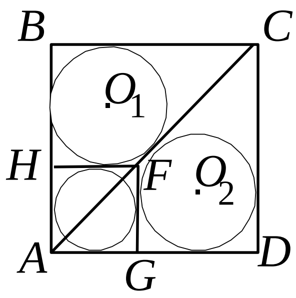
Galimi ir kitokie kvadrato padalijimo variantai.

Ats. Galima.

6. Trikampio aukštinių ilgiai yra 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Koks šis trikampis – smailusis, statusis ar bukasis?

Sprendimas. Tegu trikampio kraštinių ilgiai yra atitinkamai a cm, b cm ir c cm, o jo plotas – S. Tuomet $a=\frac{2S}{3}, b=\frac{2S}{4}, c=\frac{2S}{5}$ $\Rightarrow$

$a^2=\frac{4}{9}S^2, b^2=\frac{4}{16}S^2, c^2=\frac{4}{25}S^2 \;\Rightarrow\; a^2>b^2+c^2$. Iš šios nelygybės išplaukia (kosinusų teorema), kad trikampis bukasis.



1 pav.

7. Be skaičiuotuvų apskaičiuokite reiškinį $\log_2(tg1^0)+\log_2(tg2^0)+.....+\log_2(tg89^0)$.

Sprendimas. Pagal redukcijos formules $tg89^0=ctg1^0, tg88^0=ctg2^0, ..., tg46^0=ctg44^0$.

Todėl nagrinėjamoji suma lygi

$$\log_2(tg1^0\cdot ctg1^0)+\log_2(tg2^0\cdot ctg2^0)+.....+\log_2(tg44^0\cdot ctg44^0)+\log_2(tg45^0)=0.$$

Ats.: 0.

8. Tegu $x>0,\ y>0$. Pažymėkime a - mažiausią iš trijų skaičių $x,\ y+\frac{1}{x},\ \frac{1}{y}$, t.y. $a=\min(x,\ y+\frac{1}{x},\ \frac{1}{y})$. Kokia gali būti didžiausia skaičiaus a reikšmė?

Sprendimas. Kadangi $a=\min(x,\ y+\frac{1}{x},\ \frac{1}{y})$, tai $x\ge a,\ \frac{1}{y}\ge a \Rightarrow \frac{1}{x}\le\frac{1}{a},\ y\le\frac{1}{a}\Rightarrow y+\frac{1}{x}\le\frac{2}{a}$.

Tačiau $y+\frac{1}{x}\ge a$. Todėl $a\le\frac{2}{a}\Rightarrow a\le\sqrt{2}$.

Ats.: $\sqrt{2}$.

9. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje, tenkinančias lygybę $x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0$.

Sprendimas. Duotoje lygybėje vietoje x įrašykime $-x$. Gausime $-x(f(-x)+f(x)+4)+2f(-x)+2=0$. Sudėjus šias dvi lygybes: $f(-x)=-f(x)-2$. Įrašę šią išraišką į duotąją lygybę, apskaičiuojame $f(x)=-x-1$.

Ats.: $f(x)=-x-1$.

10. Jonas ir Petras gyvena viename name. Kiekvienoje laiptinėje kiekviename aukšte yra po 4 butus. Jonas gyvena penktame aukšte 83 bute, o Petras – trečiame aukšte 169 bute. Kelių aukštų Jono ir Petro namas?

Sprendimas. Tegu *x*- aukštų skaičius, y - laiptinių iki laiptinės, kurioje gyvena Jonas, skaičius, z - laiptinių iki laiptinės, kurioje gyvena Petras, skaičius. Tuomet

$$\begin{cases}83=4xy+16+3,\\164=4xz+8+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=16,\\xz=40,\\x\ge 5\end{cases}$$

Patikrinę skaičių 16 ir 40 bendruosius daliklius 1, 2, 4 ir 8, rasime $x=8$.

Ats.:8.