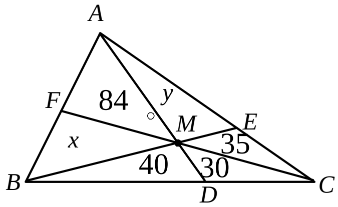
Rietavo penktoji komandinė matematikos olimpiada
mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2006 m. sausio 28 d.

**Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams**
**Sprendimai**

1. Trikampio $ABC$ viduje pažymėtas bet kuris taškas $M$. Iš trikampio viršūnių per šį tašką išvestos atkarpos $AD, BE, CF$ (žr. pav.). Apskaičiuokite trikampio $ABC$ plotą, jeigu žinomi šių trikampių plotai: $S_{AMF} = 84$, $S_{BMD} = 40$, $S_{DMC} = 30$, $S_{CME} = 35$.




*Sprendimas*. Pažymėkime $S_{BFM} = x$, $S_{AEM} = y$. Tuomet $\begin{cases} \dfrac{x+84}{40} = \dfrac{y+35}{30}, \\ \dfrac{y}{x+84} = \dfrac{35}{30+40} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x - 4y + 112 = 0, \\ x - 2y + 84 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 56, \\ y = 70. \end{cases}$ Vadinasi, $S_{ABC} = 56 + 84 + 70 + 35 + 30 + 40 = 315$. *Ats.*: 315.

2. Ar yra trikampis, kurio aukštinės lygios $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ir $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ?

*Sprendimas*. Tegu $a, b, c$ $(a > b > c)$ atkarpų – būsimojo trikampio kraštinių - ilgiai. Kad iš jų būtų galima sudaryti trikampį, reikia kad bet kurių dviejų iš jų ilgių suma būtų didesnė už trečiosios ilgį: $a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$. Kadangi pirmoji ir antroji nelygybės galioja, tai reikia tik įsitikinti, kad su duotosiomis aukštinėmis galios trečioji nelygybė $b + c > a$. Pagal trikampio ploto formulę $2S = a\sqrt{2} = b\sqrt{3} = c(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, S – trikampio plotas. Tuomet $\dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{b}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$ ir nelygybė $b + c > a$ ekvivalenti nelygybei $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Patikriname, ar ji teisinga: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{2} > 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{3} > 9\sqrt{2} \Leftrightarrow 192 > 162$ - teisinga. Taigi toks trikampis yra.

3. Jeigu rugsėjo pirmąją į klasę ateitų papildomai tiek berniukų, kiek dabar joje yra mergaičių, tai mergaičių procentas klasėje sumažėtų 1,4 karto. Kiek procentų berniukų yra klasėje?

*Sprendimas*. Tegu $m$ – mergaičių, o $b$ – berniukų skaičius klasėje. Tuomet mergaičių skaičius, išreikštas procentais nuo mokinių skaičiaus klasėje, yra $\dfrac{100m}{m+b}$. Atėjus į klasę $m$ berniukų, mergaičių procentas būtų $\dfrac{100m}{2m+b}$. Pagal sąlygą $\dfrac{100m}{m+b} = 1{,}4 \cdot \dfrac{100m}{b+2m}$. Iš čia $b = 1{,}5m$. Tuomet berniukų procentas yra $\dfrac{100b}{m+b} = \dfrac{100 \cdot 1{,}5m}{2{,}5m} = 60$. *Ats*. 60.

4. Kiek yra keturženklių skaičių, kuriuos užrašant reikia bent vieno lyginio skaitmens?

*Sprendimas*. Keturženklių skaičių, kurių visi skaitmenys nelyginiai, yra $5^4 = 625$. Iš viso keturženklių skaičių (nuo 1000 iki 9999) yra 9000. Taigi keturženklių skaičių, kurių bent vienas skaitmuo lyginis, yra $9000 - 625 = 8375$. *Ats.*: 8375.

5. Du dviženkliai pirminiai skaičiai gaunami vienas iš kito perstačius skaitmenis, o jų skirtumas yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Kokie tie pirminiai skaičiai?

   *Sprendimas*. Ieškomųjų pirminių skaičių skaitmenis pažymėkime *a*, *b*. Jie abu turi būti nelyginiai skaitmenys. Pagal sąlygą skaičius $10a+b-(10b+a)=9(a-b)$ turi būti kvadratas. Taigi galimi variantai tokie – arba $a-b=1$, arba $a-b=4$. Pirmasis atvejis iš karto atkrenta, nes abu skaitmenys turi būti nelyginiai. Antruoju atveju turime patikrinti tris galimybes: $a=5, b=1$; $a=7, b=3$; $a=9, b=5$. Tik kai $a=7, b=3$, gauname pirminį skaičių 73, o sukeitus skaitmenis vietomis – taip pat pirminį 37. *Ats*.: 73 ir 37.

6. Penkiaženkliai skaičiai su skirtingais skaitmenimis sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 ir 5. Kiek tarp šių skaičių yra tokių, kurie dalijasi iš 4?

   *Sprendimas*. Sąlygoje nurodyti skaičiai dalijasi iš 4, jei jie baigiasi galūne 12, 24, 32 arba 52. Skaičių, užsibaigiančių viena bet kuria iš išvardytų galūnių, yra $1\cdot 2\cdot 3=6$. Vadinasi, iš viso minėtų skaičių, kurie dalijasi iš 4, yra $6\cdot 4=24$.

7. Jurgis sugalvojo natūralųjį skaičių ir padaugino jį iš 13, užbraukė gautosios sandaugos paskutinįjį skaitmenį ir gautą skaičių padaugino iš 7. Po to gautosios sandaugos paskutinįjį skaitmenį vėl užbraukė ir gavo skaičių 21. Kokį skaičių buvo sugalvojęs Jurgis?

   *Sprendimas*. Po atliktų veiksmų (kol dar nebuvo nubraukęs paskutinio skaitmens) Jurgis galėjo gauti tik skaičius – arba 210, arba 219, nes tik jie dalijasi iš 7, t. y. $210=30\cdot 7$ ir $217=31\cdot 7$. Vadinasi, prieš padauginimą iš 7 buvo skaičiai 30 arba 31, o prieš paskutiniojo skaitmens nubraukimą galėjo būti skaičiai nuo 300 iki 319. Tačiau tik viena šio intervalo skaičius dalijasi iš 13. Tai $312=24\cdot 13$. *Ats*.: 24.

8. Kuris iš skaičių $(2006!)^2$ ar $2006^{2006}$ yra didesnis? Atsakymą pagrįskite.

   *Sprendimas*.

   $(2006!)^2=(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2003\cdot 2004\cdot 2005\cdot 2006)\cdot(2006\cdot 2005\cdot 2004\cdot 2003\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=$
   $(1\cdot 2006)\cdot(2\cdot 2005)\cdot(3\cdot 2004)\cdot\ldots\cdot(2005\cdot 2)\cdot(2006\cdot 1)$. Šios sandaugos (2006 dauginamieji) pirmasis ir paskutinysis dauginamasis lygus 2006, o visi kiti dauginamieji didesni už 2006 (kiekvienas iš jų yra dviejų skaičių sandauga – mažesnysis yra ne mažesnis už 2, o didesnysis ne mažesnis už $\frac{2006}{2}=1003$ ). Taigi $(2006!)^2>2006^{2006}$.

9. Raskite visus lygties $x^3+7y=y^3+7x$ sveikuosius teigiamus sprendinius.

   *Sprendimas*. $x^3+7y=y^3+7x \Leftrightarrow x^3-y^3-7(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0$. Taigi $x=y$ arba $x^2+xy+y^2=7$. Pirmosios lygties sprendiniai yra visos poros $(x;x), x\in\mathrm{N}$. Antrąją pertvarkykime: $(x-y)^2=7-3xy$, $7-3xy>0 \Rightarrow x=1, y=2$ arba $x=2, y=1$, taip pat .

   *Ats*.: $(x;x), x\in\mathrm{N}$, $(1;2)$, $(2;1)$.

10. Trys skirtingi teigiami realieji skaičiai $x, y$ ir $z$ tenkina lygybę $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$. Apskaičiuokite $\frac{x}{y}$.

    *Sprendimas*. Pažymėkime $\frac{x}{y}=a,\ \frac{z}{y}=b$. Duotąsias lygybes perrašykime kitaip:

    $$\frac{1}{\frac{x}{y}-\frac{z}{y}}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{z}{y}}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{1}{a-b}=\frac{a+1}{b}=a\text{ . Iš čia }\begin{cases}a+1=ab,\\ a^2-ab=1\end{cases}\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=2, a=-1.$$

    Pagal sąlygą tinka tik $a=2$. *Ats*. 2.

# Rietavo penktoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2006 m. sausio 28 d.

## Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

**Sprendimai**

1. Raskite mažiausią teigiamą realųjį skaičių, kurio ir 15%, ir 33% yra natūralieji skaičiai.

   *Sprendimas.* $a=\frac{15x}{100},\ b=\frac{33x}{100} \iff x=\frac{100a}{15}=\frac{100b}{33} \iff 11a=5b$. Mažiausi natūralieji skaičiai, su kuriais galioja pastaroji lygybė, yra $a=5,\ b=11$. Tuomet $x=\frac{100}{3}$. *Ats.*: $\frac{100}{3}$.

2. Išspręskite lygtį $2x^2-6xy+9y^2-12x+36=0$.

   *Sprendimas.* $2x^2-6xy+9y^2-12x+36=0 \iff (x-3y)^2+(x-6)^2=0 \iff \begin{cases} x-3y=0, \\ x-6=0. \end{cases}$ Iš čia $x=6,\ y=2$. *Ats.* $(6;2)$.

3. Kiek iš viso skaitmenų reikia užrašyti skaičiams $2^{2006}$ ir $5^{2006}$?

   *Sprendimas.* Tegu *a* yra skaičiaus $2^{2006}$ skaitmenų skaičius, o *b* – skaičiaus $5^{2006}$ skaitmenų skaičius. Tuomet $10^{a-1}<2^{2006}<10^{a}$ ir $10^{b-1}<5^{2006}<10^{b}$. Sudauginkime šias nelygybes panariui: $10^{a-1}\cdot 10^{b-1}<2^{2006}\cdot 5^{2006}<10^{a}\cdot 10^{b} \Rightarrow 10^{a+b-2}<10^{2006}<10^{a+b} \Rightarrow 10^{2006}=10^{a+b-1} \Rightarrow a+b-1=2006 \Rightarrow a+b=2007$. *Ats.* 2007.

4. Raskite tris natūraliuosius skaičius, kurių visų trijų ir kiekvienų dviejų suma būtų kvadratai.

   *Sprendimas.* (Garsaus Aleksandrijos matematiko Diofanto, gyvenusio II-III a. pr. Kr., sprendimas). Sakykime, kad visų trijų skaičių suma $m+n+l$ lygi kvadratui $x^2+2x+1$. Tegu $m+n=x^2$, tuomet trečiasis skaičius $l=2x+1$. Tegu $n+l=x^2+1-2x=(x-1)^2$. Tuomet $m=x^2+2x+1-(x^2+1-2x)=4x$, $n=x^2-4x$, $m+l=4x+2x+1=6x+1$. Vadinasi, turime ieškoti tokio natūraliojo skaičiaus *x*, kad galiotų lygybės $m+l=6x+1,\ n=x^2-4x,\ l=2x+1.$ Žinoma, skaičius $6x+1$ turi būti kvadratas. Kai $x=20$, tuomet $l=41,\ n=320,\ m=80$. *Ats.* $80, 320, 41$.

5. Skaičiai *m* ir *n* – sveikieji, tenkinantys nelygybę $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$. Įrodykite, kad $\sqrt{2}-\frac{m}{n}>\frac{1}{2\sqrt{2}\,n^2}$.

   *Įrodymas.* $\frac{m}{n}<\sqrt{2} \iff 2n^2-m^2>0 \Rightarrow 2n^2-m^2\geq 1 \iff (\sqrt{2}\cdot n-m)(\sqrt{2}\cdot n+m)\geq 1$. Kadangi $m<n\sqrt{2}$, tai $\sqrt{2}\cdot n+m<2\sqrt{2}\,n \Rightarrow \sqrt{2}\cdot n-m\geq\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n+m}>\frac{1}{2\sqrt{2}\,n}$. Padalinę abi puses iš *n*, gausime norimą nelygybę.

6. Apskaičiuokite $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cdot\cos 2$.

   *Sprendimas.*

   $$\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cdot\cos 2=\frac{1+\cos 6}{2}+\frac{1+\cos 2}{2}-\cos 4\cdot\cos 2=1+\frac{\cos 6+\cos 2}{2}-\cos 4\cdot\cos 2=$$

   $1+\cos 4\cdot\cos 2-\cos 4\cdot\cos 2=1.$ Čia reikėjo formulės $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

   *Ats.* 1.

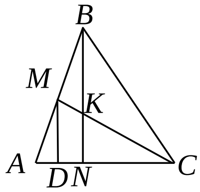
7. Teigiamas ar neigiamas yra reiškinys $\cos\frac{3}{6-x}$ su $x$ reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybę $3x^2-31x+80<0$ ?

*Sprendimas.* $3x^2-31x+80<0 \Leftrightarrow 5<x<\frac{16}{3}$. Tuomet $\frac{2}{3}<6-x<1 \Leftrightarrow 3<\frac{3}{6-x}<\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\pi<\frac{3}{6-x}<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{3}{6-x}<0$.

8. Seka $x_1, x_2, x_3,...$ apibrėžta rekurentiškai lygybėmis $\begin{cases} x_0=1, \\ x_n=x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}$. Įrodykite, kad $x_{20000}>200$.

*Įrodymas.* $x_n^2=(x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}})^2=x_{n-1}^2+2+\frac{1}{x_{n-1}^2}>2+x_{n-1}^2$, $n\geq 1$. Taigi $x_1^2>2+x_0^2$, $x_2^2>2+x_1^2>2\cdot 2+x_0^2$, $x_3^2>2+x_2^2>2\cdot 3+x_0^2$ ir t. t. $x_n^2>2+x_{n-1}^2>2\cdot n+x_0^2>2n$. Vadinasi, $x_n>\sqrt{2n}$ ir $x_{20000}>\sqrt{2\cdot 20000}=\sqrt{40000}=200$.

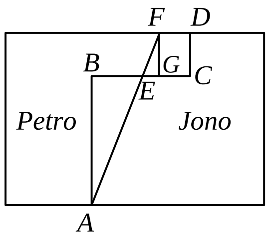
9. Trikampyje $ABC$ $\angle BAC=60^0$, $K$ – pusiaukraštinės $CM$ ir aukštinės $BN$ susikirtimo taškas, $CK=6\,cm$, $KM=1\,cm$ (žr. pav.). Raskite kitus du trikampio kampus.




*Sprendimas.* Iš taško *M* nuleiskime statmenį *MD* į kraštinę *AC*. Tuomet $AN=\frac{1}{2}AB$. Tegu $AB=4x$. Tuomet $AN=2x$, $DN=x$. Trikampiai *MDC* ir *KNC* – panašūs, todėl $NC=6DN=6x \Rightarrow AC=8x$. Tuomet $\frac{AC}{AB}=2=\frac{AB}{AN} \Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta ABN \Rightarrow \langle C=30^0, \langle B=60^0$.

*Ats.* $30^0, 60^0$.

10. Dviejų Rietavo krašto ūkininkų – kaimynų Petro ir Jono žemes skiria tvora *ABCD*, kurios dalių ilgiai tokie: $AB=30\ m,\ BC=24\ m,\ DC=10\ m$. Jie nusprendė tvorą ištiesinti, t. y. užtverti tiesią tvorą *AF*, tačiau taip, kad nei vienas, nei kitas neprarastų žemės (žr. pav.). Raskite atkarpos *FD* ilgį.




*Sprendimas*. Iš taško *F* nuleiskime statmenį *FG* į *BC*. Tegu $EC=x, FD=y$. Tuomet trapecijos *EFDC* plotas lygus $10y+5(x-y)=5(x+y)$, o trikampio *ABE* plotas yra $15(24-x)$. Kad ūkininkai nenuskriaustų vienas kito, šie plotai turi būti lygūs: $5(x+y)=15(24-x)$. Iš čia gauname lygtį $y=72-4x$. Kitą lygtį užrašome iš trikampių *ABE* ir *EFG* panašumo: $\frac{24-x}{x-y}=\frac{30}{10} \Leftrightarrow 4x=24+3y$. Tuomet $y=72-(24+3y) \Leftrightarrow y=12$.

*Ats.*: 12