Rietavo šeštoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2007 m. gruodžio 8 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Iš eilės surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 100. Kiek kartų pasikartoja kiekvienas skaitmuo?

2. Ar galima skaičius nuo 1 iki 36 surašyti į kvadratinę 6×6 lentelę taip, kad gretimuose stulpeliuose parašytų skaičių sumos skirtųsi vienetu? Atsakymą pagrįskite.

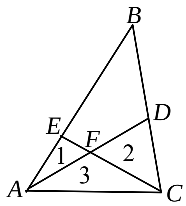
3. Natūralusis skaičius *n* turi du daliklius, o skaičius $n+1$ turi tris daliklius. Nustatykite, kiek daliklių turi natūralusis skaičius $n+2$.

4. Kvadratinės lentelės, kurios matmenys 4×4, langelius reikia užpildyti nuliais ir vienetais taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų po du nulius ir po du vienetus. Nustatykite, kokius skaičius reikia įrašyti vietoj *x* ir *y*, kai lentelė pradėta pildyti taip, kaip parodyta paveiksle.

1		**1**	
		1	
	x		**0**
	y		

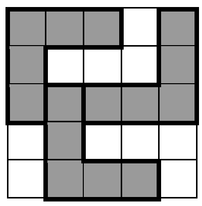
5. Tegu *a*, *b* – stačiojo trikampio statinių ilgiai, o *c* – įžambinės ilgis. Įrodykite, kad $a+b\le c\sqrt{2}$.

6. Trikampis *ABC* atkarpomis *AD* ir *CE* padalintas į keturias dalis: į trikampius *AEF*, *CFD*, *AFC* ir keturkampį *BEFD.* Trikampių *AEF*, *CFD* ir *AFC* plotai atitinkamai lygūs 1, 2 ir 3. Apskaičiuokite keturkampio *BEFD* plotą.



7. Taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgis 4 cm. Apie jį liesdama kraštines rieda 2 cm skersmens moneta. Apskaičiuokite šios monetos centro trajektorijos ilgį monetai apsukus apie daugiakampį vieną ratą.

8. Kvadrate 5×5 nubrėžtos trys nesikertančios (neturinčios bendrų langelių) „penkialangės“ figūros (žr. pav.).
Ar galima šiame kvadrate nubrėžti keturias nesikertančias tokias figūras?
Ar galima šiame kvadrate nubrėžti penkias nesikertančias tokias figūras?



9. Romos imperatorius Neronas labai mėgo žaidimus. Kiekvieną pavasarį jis organizuodavo šventę, kurios dalyviai karo vežimais (į kiekvieną vežimą susėsdavo po tą patį skaičių karių) turėdavo nuvažiuoti tam tikrą atstumą ir sugrįžti atgal. Kartą pusiaukelėje sulūžo 10 vežimų, o jų keleivius priėmė kiti vežimai – kiekvienas po vieną karį, ir kelionė tęsėsi. Grįžtant atgal sugedo dar 15 vežimų, jų keleivius po lygiai pasidalino kiti vežimai. Kiek karo vežimų ir kiek karių dalyvavo žaidime, jeigu kiekviename vežime sugrįžo trim kariais daugiau, negu išvyko?

10. Jonas Rietaviškis savo bibliotekos lentynas nutarė pakeisti naujomis. Parduotuvėje – dviejų rūšių lentynos – ąžuolo ir uosio. Jeigu jis pirktų 6 ąžuolo ir 11 uosio lentynų, tai į jas tilptų ne daugiau kaip 30 procentų bibliotekos knygų, o į 21 ąžuolo ir 16 uosio lentynų jis sutalpintų daugiau kaip 60 procentų knygų. Ar į 29 ąžuolo lentynas telpa trečdalis J. Rietaviškio bibliotekos knygų?

Rietavo šeštoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2007 m. gruodžio 8 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

1. Natūraliųjų skaičių porą $(m;n)$ vadinkime *žemaitiška pora*, jeigu skaičių m ir n didžiausias bendras daliklis yra 7, o suma $m+n$ lygi 119. Kurios žemaitiškos poros skaičių sandauga didžiausia?

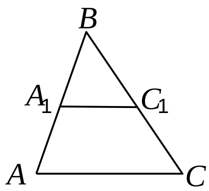
2. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $\frac{y}{x} = \frac{x-z}{y} = \frac{z}{x+y}$. Raskite skaičių y ir z santykį $\frac{y}{z}$.

3. Ar galima skaičius nuo 1 iki 100 surašyti į kvadratinę 10×10 lentelę taip, kad gretimuose stulpeliuose parašytų skaičių sumos skirtųsi vienetu? Atsakymą pagrįskite.

4. Natūralieji skaičiai x, y ir z tenkina lygtį $28x+30y+31z=365$. Raskite sumą $x+y+z$.

5. Įrodykite, kad skaičius $A=\underbrace{111...1}_{2n}-\underbrace{222...2}_{n}$ su kiekvienu $n\in \mathrm{N}$ yra kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadratas.

6. Trikampių ABC ir A_1BC_1 perimetrai yra atitinkamai lygūs a ir b. Atkarpa A_1C_1 yra lygiagreti su trikampio pagrindu AC, o į trapeciją AA_1C_1C galima įbrėžti apskritimą. Raskite kraštinės AC ilgį.



7. Įrodykite, kad per parabolių $y=x^2+x-13$ ir $x=y^2+y-12$ susikirtimo taškus galima nubrėžti apskritimą. Raskite šio apskritimo spindulio ilgį ir centro koordinates.

8. Išspręskite lygtį $(x^2-x-1)^2-x^3=5$.

9. Trupmeną $\frac{a}{b}$ galima pakeisti bet kuria iš trupmenų $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a-b}{b}$ ir $\frac{b}{a}$. Ar iš trupmenos $\frac{1}{2}$ šiais keitiniais galima gauti trupmeną $\frac{67}{91}$? Atsakymą pagrįskite.

10. Jonas Rietaviškis savo bibliotekos lentynas nutarė pakeisti naujomis. Parduotuvėje yra dviejų rūšių lentynos – ąžuolo ir uosio. Jeigu jis pirktų 6 ąžuolo ir 11 uosio lentynų, tai į jas tilptų ne daugiau kaip 30 procentų bibliotekos knygų, o į 21 ąžuolo ir 16 uosio lentynų jis sutalpintų daugiau kaip 60 procentų knygų. Ar į 29 ąžuolo lentynas telpa trečdalis J. Rietaviškio bibliotekos knygų?