RIETAVO SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2008 m. gruodžio 13 d.
Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. 2007 m. bibliotekoje knygų skaičius padidėjo 0,4 %, o 2008 m. – 0,8 %. Kokiu knygų skaičiumi padidėjo bibliotekos knygų fondas per 2008 metus, jei jis prieš 2007 metus buvo ne didesnis negu 50 000 knygų?

Sprendimas. Pažymėkime *n* knygų skaičių bibliotekoje iki 2007 metų. Tuomet 2007 metų pabaigoje knygų buvo

$$1{,}004n = \frac{251}{5^3 \cdot 2} n,$$

o 2008 m. pabaigoje knygų skaičius yra

$$1{,}008n \cdot \frac{251}{5^3 \cdot 2} n = \frac{63 \cdot 251}{5^6} n.$$

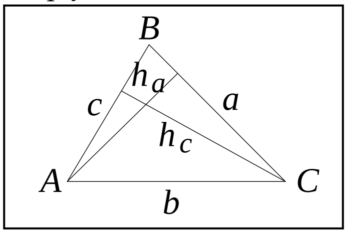
Vadinasi, *n* turi dalytis iš $5^3 \cdot 2$ ir iš 5^6, taigi iš $2 \cdot 5^6 = 31\,250$. Pagal sąlygą $n \le 50\,000$, todėl $n = 31\,250$. Tuomet per 2008 metus biblioteka pasipildė

$$1{,}004n \cdot 0{,}008 = 1{,}004 \cdot 31250 \cdot 0{,}008 = 251.$$

Ats.: 251.

2. Trikampio *ABC* aukštinė, nuleista iš viršūnės *C* yra ne mažesnė už kraštinę *AB*, o aukštinė, nuleista iš viršūnės *A* yra ne mažesnė už kraštinę *BC*. Apskaičiuokite kampą *ABC*.

Sprendimas. Pagal sąlygą $h_c \ge c$ ir $h_a \ge a$. Tačiau $h_a \le c$ ir $h_c \le a$. Todėl turi galioti nelygybės $a \le h_a \le c \le h_c \le a$, taigi $a = h_a = h_c = c$. Vadinasi, trikampis *ABC* – statusis lygiašonis. Taigi $\angle ABC = 90^\circ$.



Ats.: 90°.

3. Dėžėje 22 rutuliai, kurių kiekvienas nudažytas dviem spalvomis – pusė rutulio viena spalva, kita pusė – kita spalva; 10 rutulių yra raudoni–mėlyni, 7 rutuliai mėlyni–žali ir 5 rutuliai yra žali–raudoni. Kiek mažiausiai rutulių reikia išimti (nežiūrint), kad būtų teisingas teiginys: atsiras tokia spalva, kuria dažyti ne mažiau kaip 5 rutuliai?

Sprendimas. Išėmę vieną rutulį, turėsime dvi skirtingas spalvas. Jei išimsime 7 rutulius, turėsime $7 \cdot 2 = 14$ nudažytų pusių. Kadangi skirtingų spalvų yra 3, tai iš tų 14 pusių būtinai atsiras 5 pusės, nudažytos ta pačia spalva.

Nesunku įsitikinti, kad 6 rutulius išimti (kad galiotų sąlygos teiginys) nepakanka: jeigu išimsime 2 raudonus-mėlynus, 2 mėlynus-žalius ir 2 žalius-raudonus, tai kiekviena spalva bus dažyti lygiai 4 rutuliai.

Ats.: 7.

4. Ant devynių kortelių surašyti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ant kiekvienos – po vieną skaitmenį). Iš šių kortelių sudarykite 5 skaičius x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, kad galiotų lygybės $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$, $x_4 = 4x_1$, $x_5 = 5x_1$.

Sprendimas. Šie skaičiai yra 9, 18, 27, 36, 45.

5. Raskite natūralųjį skaičių, pasižymintį savybėmis:

- dauginant jį iš 3, pirmasis skaitmuo nukeliamas į galą;
- dauginant jį iš 5, paskutinysis skaitmuo nukeliamas į priekį.

Sprendimas. Toks skaičius yra 142 857, nes

$$142\,857 \cdot 3 = 428\,571,$$
$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285.$$

6. Kiek tarp skaičių 1, 2, 3, ..., 500 yra nesidalijančių nei iš 2, nei iš 3?

Sprendimas. 250 iš šių skaičių dalijasi iš 2, 166– iš 3 ir 83 – iš 6. Taigi $250+166-83=333$ skaičiai dalijasi iš 2 arba iš 3. Vadinasi, nei iš 2, nei iš 3 nesidalija $500-333=167$ skaičiai.

Ats.: 167.

7. Išspręskite lygtį $2x^2-6xy+9y^2-12x+36=0$.

Sprendimas. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $(x-3y)^2+(x-6)^2=0$. Iš čia $x-3y=0$ ir $x-6=0$. Taigi, $x=6$, $y=2$.

Ats.: $x=6$, $y=2$.

8. Įrodykite, kad lygtis $x^3+3x^2+2x+2008=0$ neturi sveikųjų sprendinių.

Įrodymas. Užrašykime lygtį taip:

$$x\,(x+1)\,(x+2)=-2008.$$

Kairioji lygties pusė – trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga – dalijasi iš 6. Tačiau skaičius 2008 iš 6 nesidalija, todėl lygtis neturi sveikųjų sprendinių.

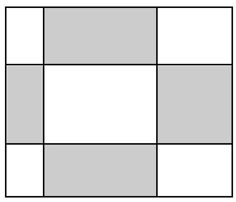
9. Atstumas tarp Rietavo ir Gargždų 28 km. Du draugai Jonas Rietaviškis ir Petras Gargždiškis vienu metu išvažiavo į kelionę dviračiais: Jonas – į Gargždus, Petras – į Rietavą. Po valandos jie susitiko ir be sustojimo (tik pamojavo vienas kitam) tęsė kelionę. Jonas Rietaviškis atvyko į Gargždus 35 min anksčiau negu Petras Gargždiškis į Rietavą. Raskite dviratininkų greičius.

Sprendimas. Pažymėkime x km/h – Jono greitį, o y km/h – Petro greitį. Sudarome lygčių sistemą:

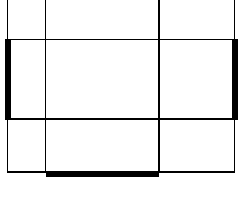
$$\begin{cases} x+y=28, \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{35}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=28-x, \\ \dfrac{x}{28-x}-\dfrac{28-x}{x}=\dfrac{35}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=28-x, \\ x^2+68x-1344=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=28-x, \\ x=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16, \\ y=12. \end{cases}$$

Ats.: 12, 16.

10. Stačiakampis 5×7 (centimetrais) padalytas į 9 stačiakampiukus, kurie nudažyti šachmatiškai (žr. pav.). Visų nudažytų stačiakampiukų perimetrų suma lygi visų baltųjų stačiakampiukų perimetrų sumai. Apskaičiuokite viduriniojo balto stačiakampiuko perimetrą.



Sprendimas. Laikykime, kad nudažytųjų stačiakampiukų kraštinės taip pat nudažytos. Stačiakampiukų kraštinės, kurios nėra didžiojo stačiakampio kraštinėse, yra kartu ir nudažyto, ir balto stačiakampiuko kraštinės. Todėl atimant iš nudažytųjų stačiakampiukų perimetrų sumos baltųjų stačiakampiukų perimetrų sumą, liks tik kraštinių, priklausančių stačiakampio kraštinėms, ilgiai. Kadangi pagal sąlygą šis skirtumas lygus nuliui, tai nudažytųjų dalių ilgių suma bus lygi „baltųjų“ dalių ilgių sumai. Kadangi stačiakampio perimetras lygus $2\cdot(5+7)=24$, tai nudažytųjų dalių ilgių suma yra 12. O tai ir yra viduriniojo balto stačiakampiuko perimetras (žr. pav.).



Ats.: 12.

RIETAVO SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2008 m. gruodžio 13 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2val.

1. Ar galima rasti 5 natūraliuosius skaičius, kad visų galimų jų porų sumos sudarytų dešimt iš eilės einančių natūraliųjų skaičių?

Sprendimas. Tarkime, kad yra tokie penki natūralieji skaičiai $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5,$ jog visų galimų jų porų sumos $n_1+n_2,$ $n_1+n_3,$ $n_1+n_4,$ $n_1+n_5,$ $n_2+n_3,$ $n_2+n_4,$ $n_2+n_5,$ $n_3+n_4,$ $n_3+n_5,$ $n_4+n_5,$ išdėstytos didėjančia tvarka, yra dešimt iš eilės einančių natūraliųjų skaičių: $n,$ $n+1,$ $n+2,$ $n+3,$ $n+4,$ $n+5,$ $n+6,$ $n+7,$ $n+8,$ $n+9.$

Pažymėkime $S = n_1+n_2+n_3+n_4+n_5.$ Tuomet

$$n+(n+1)+(n+2)+...+(n+9) = 5\,(2n+9).$$

Kita vertus,

$$(n_1+n_2)+(n_1+n_3)+...+(n_4+n_5) = 4S.$$

Taigi $4S = 5\,(2n+9).$ Iš šios lygybės išplaukia, kad S – trupmeninis skaičius. Gavome prieštarą – iš tikrųjų S yra natūralusis skaičius.

Ats.: negalima.

2. Įrodykite, kad skaičius $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{555...5}_{n-1}6$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Įrodymas. Tegu $N = \underbrace{111...1}_{n}.$ Tuomet $9N = \underbrace{999...9}_{n}$ ir $9N+1 = 10^n.$ Iš čia $N = \dfrac{10^n - 1}{9}.$

Nagrinėkime duotąjį skaičių:

$$\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{555...5}_{n-1}6 = \underbrace{111...1}_{2n} + 4\cdot\underbrace{111...1}_{n} + 1 = \frac{10^{2n}-1}{9} + 4\cdot\frac{10^n-1}{9} + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4) = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2.$$

3. Lentoje parašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2009. Galima nutrinti bet kuriuos du skaičius vietoje vieno iš jų parašant jų skirtumą arba jų sumą. Ar kartojant šią procedūrą galima gauti nulį?

Sprendimas. Atliekant nurodytą veiksmą vietoje dviejų lyginių ir vietoje dviejų nelyginių skaičių parašysime lyginį, o kai vienas lyginis, kitas nelyginis, parašysime nelyginį skaičių. Kad gautume nulį, prieš tai turime gauti du lyginius arba priešingo ženklo skaičius. Vadinasi, užrašytųjų skaičių suma turi būti lyginis skaičius, tačiau

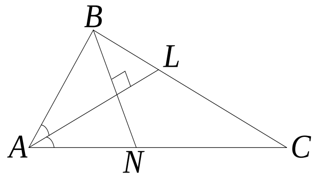
$$1+2+3+...+2009 = \frac{1+2009}{2}\cdot 2009 = 1005\cdot 2009$$

yra nelyginis. Gavome prieštarą.

Ats.: Negalima.

4. Trikampio perimetras 63 cm, o viena jo kraštinė lygi 21 cm. Raskite kitas dvi kraštines, jeigu viena trikampio pusiaukraštinė yra statmena vienai iš pusiaukampinių.

Sprendimas. Brėžinyje AL – pusiaukampinė, BN – pusiaukraštinė, $AL \perp BN$. Trikampis ANB – lygiašonis (kampo A pusiaukampinė yra trikampio aukštinė), todėl $AB = AN$, $AC = 2AB$.

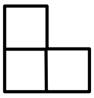


Jeigu būtų $AB = 21$ cm, tai $AC = 42$ cm ir tuomet $AB + AC = 63$ cm $\Rightarrow BC = 0$.

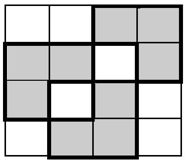
Jeigu $AC = 21$ cm, tai $AB = 10{,}5$ cm, $BC = 31{,}5$ cm. Tačiau šiuo atveju $BC = AB + AC$ – prieštarauja trikampio nelygybei.

Vadinasi, $BC = 21$ cm. Tada $AB + AC = 3AB = 42$ cm, $AB = 14$ cm, $AC = 28$ cm.

Ats.: 14 cm, 28 cm.

5. Kiek mažiausiai figūrų  reikia, kad jas išdėsčius (vartyti galima) $n \times n$ kvadrate, jame nebetilptų nė viena tokia figūra neuždengdama kitų? Atsakymą pagrįskite brėžiniu. Išspręskite uždavinį, kai $n = 4$ ir kai $n = 5$.

Sprendimas. Kad būtų išpildomas sąlygos reikalavimas, trilanges figūras turime išdėlioti taip, kad kiekvieno 2×2 kvadrato ne mažiau kaip du langeliai būtų uždengti. Tokios dėlionės pavyzdį matome:



Ats.: Kai $n = 4$, tai 3; kai $n = 5$, tai 4.

6. Raskite reiškinio $\frac{x}{y} + \frac{z}{t}$ mažiausią reikšmę, jeigu $1 \le x \le y \le z \le t \le 100$.

Sprendimas. Pasinaudoję duotosiomis nelygybėmis ir nelygybe $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ ($a \ge 0$, $b \ge 0$), gauname:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} \ge \frac{1}{y} + \frac{z}{100} \ge \frac{1}{y} + \frac{y}{100} \ge 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{y}{100}} = \frac{1}{5}.$$

Lygybę (mažiausią reikšmę) gauname, kai $y = 10 \Rightarrow z = 10$, $x = 1$, $t = 100$.

Ats.: $\frac{1}{5}$.

7. Teigiami skaičiai *a*, *b*, *c* ir *d* tokie, kad $abcd = 1$. Įrodykite, kad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \ge 10.$$

Įrodymas. Pasinaudoję nelygybe $x^2 + y^2 \ge 2xy$, turime

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 2\,(ab + cd) = 2((\sqrt{ab})^2 + \sqrt{cd})^2) \ge 4\sqrt{abcd} = 4.$$

Tuomet

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \ge$$
$$\ge 4 + (ab + cd) + (ac + bd) + (ad + bc) \ge 10,$$

nes

$$ab + cd \ge 2\sqrt{abcd} = 2, \quad ac + bd \ge 2\sqrt{abcd} = 2, \quad ad + bc \ge 2\sqrt{abcd} = 2.$$

8. Skaičių padauginę iš jo skaitmenų sumos gauname 2008. Koks tai skaičius?

Sprendimas. Ieškomasis skaičius yra 2008 daliklis: $2008 = 2^3 \cdot 251$. Visi skaičiaus 2008 dalikliai yra : 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Tinkamas skaičius yra tik 251, nes $2008 = 251 \cdot (2+5+1)$.

Ats.: 251.

9. Jonas Rietaviškis mėgsta važinėtis dviračiu. Jis, nuvažiavęs pusę numatyto kelio, padidino greitį 25 % ir kelionės tikslą pasiekė 0,5 h anksčiau negu planavo. Kiek laiko Jonas užtruko kelyje?

Sprendimas. Tarkime, Jonas buvo numatęs nuvažiuoti a km ir važiuoti v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu. Taigi jis kelionės tikslą turėjo pasiekti per $\frac{a}{v}$ h. Sudarome lygtį

$$\frac{a}{2v} + \frac{a}{2{,}5v} = \frac{a}{v} - \frac{1}{2}.$$

Išsprendę ją $\frac{a}{v}$ atžvilgiu, gauname $\frac{a}{v} = 5$. Taigi, Jonas kelyje užtruko $5 - 0{,}5 = 4{,}5$ h.

Ats.: 4,5 h.

10. Apibrėžkime dviejų teigiamų skaičių a ir b „žemaitišką sandaugą“ lygybe $a * b = a^b$. Apskaičiuokite reiškinį

$$\frac{3*(3*(3*1))}{((3*1)*3)*3}.$$

Sprendimas. Apskaičiuokime atskirai trupmenos skaitiklį ir vardiklį:

$$A = 3*(3*(3*1)) = 3*(3*3) = 3*3^3 = 3^{3^3} = 3^{27};$$

$$B = ((3*1)*3)*3 = (3*3)*3 = 3^3*3 = 3^9;$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3^{27}}{3^9} = 3^{18}.$$

Ats.: 3^{18}.