



## RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams  
Uždavinių sprendimo trukmė - 2val.

1. Lentoje užrašyti šeši realieji skaičiai  $a, b, c, a^2 - b, b^2 - c$  ir  $c^2 - a$ . Kiek daugiausiai tarp jų gali būti neigiamų skaičių?
2. Koks mažiausias teigiamas skaičius, kurio ir 35%, ir 56% yra natūralieji skaičiai?
3. Trikampio kraštinių ilgių  $a, b$  ir  $c$  tenkina lygybę  $a^3 + b^3 = c^3$ . Ar šis trikampis gali būti statusis?
4. Raskite visas realiųjų skaičių poras  $(x, y)$ , tenkinančias lygybę

$$(x - y^2)(y - x^2) + x^3 + y^3 = 2.$$

5. Ar galima rasti penkis natūraliuosius skaičius  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ , kad jų porų sumos  $(n_1 + n_2, n_1 + n_3, \dots, n_4 + n_5)$  sudarytų dešimt iš eilės einančių natūraliųjų skaičių?
6. Įrodykite, kad tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kuris yra mažesnis už savo *tikrinių daliklių* sumą. (Skaičiaus  $n$  *tikriniu dalikliu* vadiname natūralųjį skaičių  $d, 1 < d < n$ , iš kurio dalijasi  $n$ .)
7. Trikampyje  $ABC$  išvesta vidurinė linija  $KL$ , lygiagreči su kraštine  $AC$  ( $K$  – kraštinės  $AB$  taškas). Per viršūnę  $A$  ir vidurinės linijos  $KL$  vidurio tašką  $E$  nubrėžta tiesė, kuri kraštinę  $BC$  kerta taške  $F$ . Raskite trikampių  $AFC$  ir  $AFB$  plotų santykį.
8. Su kokia realiųjų skaičių  $x$  ir  $y$  pora  $(x, y)$  reiškinio

$$x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2$$

reikšmė mažiausia? Raskite šią reikšmę.

9. Kokią lygybę tenkina skaičiai  $a, b$  ir  $c$ , jeigu  $x + \frac{1}{x} = a, y + \frac{1}{y} = b, xy + \frac{1}{xy} = c$ ?
10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti draugą Petrą Plungiškį. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiaęs. Ties Stalgėnais Jonas labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo  $\frac{5}{13}$  lyginant su prieš tai buvusiu. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?



# RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams  
Uždavinių sprendimo trukmė - 2val.

1. Lentoje parašyta lygtis  $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$ . Du draugai žaidžia taip. Pirmasis vietoje bet kurio daugtaškio įrašo sveikąjį skaičių, antrasis taip pat vietoje kurio nors iš likusių dviejų daugtaškių įrašo sveikąjį skaičių, po to sveikąjį skaičių į likusią vietą vėl įrašo pirmasis. Ar gali pirmasis žaidėjas žaisti taip, kad gautosios lygties sprendiniai būtų sveikieji skaičiai?
2. Funkcija  $f(x)$ , apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje, su visais natūraliaisiais  $m$  ir  $n$  turi savybę  $f(m) + f(n) = f(mn)$ . Apskaičiuokite  $f(12)$ , jeigu  $f(2) = 7$  ir  $f(3) = 10$ .
3. Keturženklis skaičius  $n = \overline{abcd}$  yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o jo skaitmenys tenkina lygybes  $a = c$ ,  $b = d + 1$ . Koks šis skaičius?
4. Tegu  $ABC$  yra statusis trikampis, kurio statusis kampas  $B$ . Kvadratas  $ACDE$  nubrėžtas išorinėje trikampio  $ABC$  pusėje.  $M$  yra šio kvadrato centras. Raskite kampo  $MBC$  didumą.
5. Su kokia realiųjų skaičių  $x$  ir  $y$  pora  $(x, y)$  reiškinio

$$x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2$$

reikšmė mažiausia? Raskite šią reikšmę.

6. Raskite sumą  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$ .
7. Tegu  $x, y, z$  yra skirtingi nelygūs nuliui realieji skaičiai, tenkinantys lygybes  $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ . Apskaičiuokite sandaugą  $xyz$ .
8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras  $(x, y)$ , tenkinančias lygtį  $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$ .
9. Jonas Rietaviškis sugalvojo tris natūraliuosius skaičius. Kiekvienai iš šių skaičių sudarytai porai  $(a, b)$  jis apskaičiavo skirtumą  $ab - (a + b)$ . Pasirodė, kad vienas skirtumas yra teigiamas ir vienas neigiamas. Koks trečias skirtumas?
10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti draugą Petrą Plungiškį. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiaęs. Ties Stalgėnais labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius, nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo  $\frac{5}{13}$  lyginant su prieš tai buvusia. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?