RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Raskite visas realių skaičių poras (x, y) tenkinančias lygybę

$$(x - y^2)(y - x^2) + x^3 + y^3 = 2. \tag{1}$$

Sprendimas. Sudauginę reiškinius skliaustuose ir sutraukę panašiuosius narius gauname lygtį

$$(xy)^2 + xy = 2. \tag{2}$$

Pažymėkime $z = xy$. Tada (2) lygtis virsta kvadratine

$$z^2 + z - 2 = 0. \tag{3}$$

Apskaičiuojame šios lygties diskriminantą: $D = 9$. Diskriminantas D teigiamas, todėl (3) lygtis turi dvi šaknis $z_1 = -2$ ir $z_2 = 1$. Iš čia randame poras $(x, y) = (t, \frac{-2}{t})$ ir $(x, y) = (t, \frac{1}{t})$, kur $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tenkinančias (1) lygtį.

Atsakymas. $(x, y) = (t, \frac{-2}{t})$ ir $(x, y) = (t, \frac{1}{t})$, kur $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ □

2. Kiek yra funkcijų f apibrėžtų aibėje $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ su reikšmių aibe $\{2011, 2012\}$ tokių, kad suma

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$$

yra nelyginis skaičius.

Sprendimas. Funkcija f taškuose $1, 2, \ldots, 9$ gali įgyti bet kurią iš dviejų reikšmių: 2011 arba 2012. Taške 10 funkcijos f reikšmę parenkame taip: jei suma $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(9)$ yra nelyginė, tada $f(10) = 2012$, o jei lyginė, tada $f(10) = 2011$. Toku būdu gauname 2^9 skirtingų funkcijų.

Atsakymas. Iš viso yra 2^9 skirtingų funkcijų. □

3. Įrodykite, kad tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kuris yra mažesnis už savo *tikrinių* daliklių sumą. (Skaičiaus n tikriniu dalikliu vadiname natūralųjį skaičių, kuris dalija n, yra didesnis už 1 ir mažesnis už n.)

Sprendimas. Tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kuris dalijasi iš 12. Pažymėkime tą skaičių $12k$. Tarp šio skaičiaus tikrinių daliklių yra $2k$, $3k$, $4k$ ir $6k$. Tačiau $2k + 3k + 4k + 6k = 15k > 12k$, ką ir reikėjo įrodyti. □

4. Tegu ABC yra statusis trikampis, kur B - statusis kampas. Kvadratas $ACDE$ nubrėžtas išorinėje trikmapio ABC pusėje. M yra šio kvadrato centras. Raskite kampo MBC didumą.

Sprendimas. Kadangi $\angle CBA + \angle CMA = 90° + 90° = 180°$, tai keturkampis $ABCM$ yra apibrėžtinis. $\angle MAC = \angle MCA$, nes trikampis MCA yra lygiašonis. $\angle MAC = \angle MBC$, nes šie kampai remiasi į tą patį apskritimo $ABCM$ lanką CM. $\angle MCA = \angle MBA$, nes šie kampai remiasi į tą patį apskritimo $ABCM$ lanką MA. Todėl $\angle MBC = \angle MBA = 45°$. □

5. Raskite sąryšį tarp a, b ir c, jeigu $x + \frac{1}{x} = a$, $y + \frac{1}{y} = b$, $xy + \frac{1}{xy} = c$.

Sprendimas.
$$ab = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$
Todėl $ab - c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Kitą vertus
$$(ab - c)c = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = a^2 + b^2 - 4.$$
Iš čia gauname, kad
$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$
Atsakymas. $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$. □

6. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (x, y) tenkinančias lygtį $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$.

Sprendimas. Spręsime lygtį x atžvilgiu. Apskaičiuojame diskriminantą $D = 9y^2 - 8y^2 - 24 = y^2 - 24$. Kadangi ieškome sprendinių tarp natūraliųjų sakičių, diskriminantas turi būti natūraliojo skaičiaus kvadrastas. Todėl pareikalaujame, kad $y^2 - 24 = k^2$. Pertvarkę reiškinį gauname
$$(y + k)(y - k) = 24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4.$$
Kiekvieną iš šių atvejų nagrinėsime atskirai. Lygčių sistemos
$$\begin{cases} y + k = 24, \\ y - k = 1 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} y + k = 8, \\ y - k = 3 \end{cases}$$
natūraliųjų sprendinių neturi. Lygčių sistema
$$\begin{cases} y + k = 12, \\ y - k = 2 \end{cases}$$
turi sprendinį $(y, k) = (7, 5)$. Tada lygtis $x^2 - 21x + 104$ turi du sprendinius $x_1 = 8$, $x_2 = 13$. Lygčių sistema
$$\begin{cases} y + k = 6, \\ y - k = 4 \end{cases}$$
turi sprendinį $(y, k) = (5, 1)$. Tada lygtis $x^2 - 13x + 56$ turi du sprendinius $x_1 = 7$, $x_2 = 8$. Taip randame visas keturias poras: $(x, y) = (8, 7), (13, 7), (7, 5), (8, 5)$.

Atsakymas. $(x, y) = (8, 7), (13, 7), (7, 5), (8, 5)$. □

7. Triženklio skaičiaus x skaitmenų suma lygi a, o skaičių x^2, x^3, x^4 skaitmenų suma atitinkamai lygi a^2, a^3, a^4. Kam lygus x?

Sprendimas. Pagal sąlygą, $x < 1000$, todėl $x^4 < 10^{12}$. Iš čia seka, kad $a^4 \le 9 \cdot 12 = 108$. Iš paskutinės nelygybės gauname $a \le 3$. Dabar nesunku išrašyti visas galimas x reikšmes:
$$x \in \{300, 201, 210, 120, 102, 111, 200, 110, 101, 100\}.$$
Patikrinę kiekvieną reikšmę randame šias keturias $x \in \{200, 110, 101, 100\}$.

Atsakymas. $x \in \{200, 110, 101, 100\}$. □

8. Bet kuriem dviems realiesiems skaičiams x ir y apibrėžkime funkciją
$$f(x, y) = x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2.$$
Kuriame taške (x, y) funkcija įgyja mažiausią reikšmę?

Sprendimas. Du kartus išskyrę pilną kvadratą gauname $f(x,y) = (x-3y)^2 + (2y-1)^2 - 3$. Todėl $f(x,y) \geq -3$ visoms x ir y reikšmėms. Be to, $f(x,y) = -3$, kai $y = \frac{1}{2}$, o $x = \frac{3}{2}$.

Atsakymas. $(x,y) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. □

9. Tegu x, y, z yra teigiami skačiai. Įrodykite, kad

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) \geq \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right).$$

Sprendimas. Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) &\geq \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right),\\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) &\geq \left(x+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right),\\ \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) &\geq \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

Sudauginę šias tris nelygybes, gauname

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 \geq{}& \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)\\ &\left(x+\frac{1}{z}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

Atlikę veiksmus skliausteliuose galime įrodyti, kad

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) = \left(x+\frac{1}{z}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{y}\right),$$

todėl

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 \geq \left(x+\frac{1}{y}\right)^2\left(y+\frac{1}{z}\right)^2\left(z+\frac{1}{x}\right)^2$$

Ištraukę šaknį gauname norimą nelygybę.

□

10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti darugą Petrą Plungiškį. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiavęs. Ties Stalgėnais labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo $\frac{5}{13}$ lyginant su prieš tai buvusia. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?

Sprendimas. Sakykime $100a$ - bandelių masė. 3 didžiausių bandelių masė - $35a$. 3 pačios mažiausios bandelės sveria $\frac{5}{13} \cdot 65a = 25a$. Likusių bandelių svoris - $40a$. Tegu jų skaičius yra $n-6$. Žinome, kad $n - 6 \geq 3$ nes kitaip 3 pačios didžiausios bandelės svertų ne mažiau kaip $40a$. Iš kitos pusės, $n - 6 < 5$, nes priešingu atveju likusių bandelių vidutinis svoris būtų mažesnis už $8a$. Vadinasi būtų bent viena bandelė, kuri svertų ne dugiau negu $8a$. Bet trys pačios mažiausios svėrė $25a$. Todėl tarp jų buvo bent viena, kuri svėrė daugiau negu $8a$. Prieštara. Iš gautų rėžų gauname vienintelį galimą variantą $n - 6 = 4$. Taigi, $n = 10$.

Atsakymas. Iš namų Jonas išsivežė 10 bandelių. □

RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Lentoje parašyta lygtis $x^3 + \cdots x^2 + \cdots x + \cdots = 0$. Du draugai žaidžia taip. Pirmasis vietoje bet kurio daugtaškio įrašo sveikąjį skaičių, antrasis taip pat vietoje kurio nors iš likusių dviejų daugtaškių įrašo sveikąjį skaičių, po to sveikąjį skaičių į likusią vietą vėl įrašo pirmasis. Ar gali pirmasis žaidėjas žaisti taip, kad gautosios lygties sprendiniai būtų sveikieji skaičiai?

   Sprendimas. Pirmasis prie x parašo koeficientą -1. Toliau, jei antrasis parašo laisvąjį narį a, tai pirmasis prie x^2 turi parašyti $-a$, jei antrasis prie x^2 parašo a, tai pirmasis – laisvąjį narį $-a$. Tokiu būdu gaunamos lygtys $x^3 - ax^2 - x + a = 0$ arba $x^3 + ax^2 - x - a = 0$, t. y. $(x^2 - 1)(x - a) = 0$ arba $(x^2 - 1)(x + a) = 0$, turinčios sveikuosius sprendinius. *Atsakymas.* Gali. □

2. Funkcija $f(x)$, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje, su visais natūraliaisiais m ir n turi savybę $f(m) + f(n) = f(mn)$. Apskaičiuokite $f(12)$, jeigu $f(2) = 7$ ir $f(3) = 10$.

   Sprendimas. $f(12) = f(6 \cdot 2) = f(6) + f(2) = f(2 \cdot 3) + f(2) = 2f(2) + f(3) = 14 + 10 = 24$. *Atsakymas.* 24. □

3. Keturženklis skaičius $n = \overline{abcd}$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o jo skaitmenys tenkina lygybes $a = c$, $b = d + 1$. Koks šis skaičius?

   Sprendimas. Pagal sąlygą $n = 1000a + 100(d + 1) + 10a + d = m^2$. Atlikę veiksmus gauname lygybę $1010a + 101d + 100 = m^2$. Iš čia $101(10a + d) = (m - 10)(m + 10)$. Kadangi 101 yra pirminis skaičius, tai $m - 10$ arba $m + 10$ turi dalytis iš 101. Tačiau $m < 100$, todėl $m + 10 = 101$, $m = 91$. Taigi $m^2 = 91^2 = 8281$. *Atsakymas.* 8281. □

4. Tegu ABC yra statusis trikampis, kurio statusis kampas B. Kvadratas $ACDE$ nubrėžtas išorinėje trikampio ABC pusėje. M yra šio kvadrato centras. Raskite kampo MBC didumą.

   Sprendimas. Kadangi $\angle CBA + \angle CMA = 90° + 90° = 180°$, tai keturkampis $ABCM$ yra įbrėžtinis. $\angle MAC = \angle MCA = 45°$, nes trikampis MCA yra lygiašonis statusis. $\angle MAC = \angle MBC$, nes šie kampai remiasi į tą patį apskritimo lanką CM. Todėl $\angle MBC = \angle MAC = 45°$. *Atsakymas.* 45°. □

5. Su kokia realiųjų skaičių x ir y pora (x, y) reiškinio $x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2$ reikšmė mažiausia? Raskite šią reikšmę.

   Sprendimas. Du kartus išskyrę pilną kvadratą, gauname $x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2 = (x - 3y)^2 + (2y - 1)^2 - 3 \geq -3$, o mažiausia reikšmė įgyjama, kai $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$. *Atsakymas.* $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), -3$. □

6. Raskite sumą $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

   Sprendimas. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n = (2 - 1) \cdot 1! + (3 - 1) \cdot 2! + \ldots + ((n + 1) - 1) \cdot n! = (2 \cdot 1! - 1!) + (3 \cdot 2! - 2!) + \ldots + ((n + 1) \cdot n! - n!)) = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + ((n + 1)! - n!) = (n + 1)! - 1$. *Atsakymas.* $(n + 1)! - 1$. □

7. Tegu x, y, z yra skirtingi nelygūs nuliui realieji skaičiai, tenkinantys lygybes $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Apskaičiuokite sandaugą xyz.

Sprendimas. Iš duotųjų lygybių gauname: $x - y = \frac{y-z}{yz}$, $y - z = \frac{z-x}{xz}$, $x - z = \frac{y-x}{xy}$. Sudauginę šias lygybes, turime
$$(x-y)(y-z)(x-z) = \frac{(y-z)(z-x)(y-x)}{x^2y^2z^2}.$$
Kadangi x, y, z yra skirtingi skaičiai, tai, padaliję abi lygybės puses iš $(x-y)(y-z)(x-z)$, gauname lygybę $x^2y^2z^2 = 1$. Iš čia $xyz = 1$ arba $xyz = -1$. *Atsakymas.* $xyz = 1$ arba $xyz = -1$. $\square$

8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (x, y), tenkinančias lygtį $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$.

   Sprendimas. Spręsime lygtį x atžvilgiu. Apskaičiuojame diskriminantą $D = 9y^2 - 8y^2 - 24 = y^2 - 24$. Kadangi ieškome natūraliųjų sprendinių, tai diskriminantas turi būti natūraliojo skaičiaus kvadratas: $y^2 - 24 = k^2$. Pertvarkę gauname: $(y+k)(y-k) = 24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$. Kiekvieną iš šių atvejų nagrinėsime atskirai. Lygčių sistemos $\begin{cases} y+k=24, \\ y-k=1 \end{cases}$ ir $\begin{cases} y+k=8, \\ y-k=3 \end{cases}$ natūraliųjų sprendinių neturi. Lygčių sistema $\begin{cases} y+k=12, \\ y-k=2 \end{cases}$ turi sprendinį $(y, k) = (7, 5)$. Tada atitinkama lygtis $x^2 - 21x + 104 = 0$ turi du sprendinius $x_1 = 8$, $x_2 = 13$. Lygčių sistema $\begin{cases} y+k=6, \\ y-k=4 \end{cases}$ turi sprendinį $(y, k) = (5, 1)$. Atitinkama lygtis $x^2 - 15x + 56 = 0$ turi du sprendinius $x_1 = 7$, $x_2 = 8$. Taip randame visas keturias poras (x, y): $(8, 7), (13, 7), (7, 5), (8, 5)$. *Atsakymas.* $(8, 7), (13, 7), (7, 5), (8, 5)$.

   Pastaba. Šį uždavinį galima išspręsti ir taip. Duotąją lygtį užrašome $(x - 2y)(x - y) = -6$. Iš čia išplaukia, kad $x > y$ (nes, kai $x \leq y$, tai kairioji lygties pusė neneigiama). Tuomet $x - y \in \{1; 2; 3; 6\}$. Toliau išsprendžiame atitinkamas lygtis atvejais $x - y = 1, \ldots, x - y = 6$. $\square$

9. Jonas Rietaviškis sugalvojo tris natūraliuosius skaičius. Kiekvienai iš šių skaičių sudarytai porai (a, b) jis apskaičiavo skirtumą $ab - (a + b)$. Pasirodė, kad vienas skirtumas yra teigiamas ir vienas neigiamas. Koks trečias skirtumas?

   Sprendimas. Tegu pasirinktieji skaičiai yra x, y, z. Tarkime, kad $xy - (x+y) < 0$ ir $yz - (y+z) > 0$. Iš čia gauname: $(x-1)(y-1) - 1 < 0$ ir $(y-1)(z-1) - 1 > 0$. Iš pirmos nelygybės išplaukia, kad $x = 1$ arba $y = 1$, o iš antros turime, kad $y > 1$. Todėl $x = 1$ ir $xz - (x+z) = (x-1)(z-1) - 1 < 0$. *Atsakymas.* Neigiamas. $\square$

10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti draugą Petrą Plungiškį. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiavęs. Ties Stalgėnais labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius, nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo $\frac{5}{13}$ lyginant su prieš tai buvusia. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?

    Sprendimas. Sakykime, $100a$ – bandelių masė, o jų skaičius n. Tuomet trijų didžiausių bandelių masė - $35a$, o trijų mažiausių bandelių – $\frac{5}{13} \cdot 65a = 25a$. Likusių bandelių, kurių yra $n - 6$, masė $40a$.

    Aišku, kad $n - 6 > 3$, nes kitaip trys didžiausios bandelės svertų ne mažiau kaip $40a$.

    Iš kitos pusės, $n - 6 < 5$. Tuo įsitikiname, tarę, kad $n - 6 \geq 5$. Tuomet likusių bandelių vidutinė masė būtų mažesnė už $\frac{40a}{5} = 8a$. Vadinasi, būtų bent viena bandelė, kurios masė ne didesnė negu $8a$. Bet trijų pačių mažiausių masė yra $25a$. Todėl tarp jų buvo bent viena, kuri svėrė daugiau negu $8a$. Gavome prieštarą.

    Iš nelygybių $n - 6 > 3$, $n - 6 < 5$ išplaukia, kad $n - 6 = 4$. Taigi $n = 10$. *Atsakymas.* 10.

    $\square$