RIETAVO VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2012 m. gruodžio 7 d.
Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Dėžėje sudėti raudoni ir žali rutuliai. Kiekvienas rutulys sveria vieną arba du kilogramus. Žinoma, kad yra abiejų spalvų ir abiejų svorių rutulių. Įrodykite, kad atsiras du rutuliai, kurie yra ir skirtingų spalvų, ir skirtingų svorių.

2. Ant lentos iš eilės užrašyti skaičiai nuo 1 iki 1000. Du žaidėjai – Jonas ir Petras – paeiliui nutrina po vieną skaičių. Žaidimą pradeda Jonas ir jis tęsiamas kol ant lentos lieka tik du skaičiai. Sutarta: jeigu likusių dviejų skaičių suma dalijasi iš 3, tai laimi Jonas, jeigu nesidalija iš 3 – laimi Petras. Kokią žaidimo strategiją turi pasirinkti Petras, kad jis laimėtų?

3. Skaičiai nuo 1 iki 37 surašyti vienoje eilutėje tokia tvarka, kad kiekvienas skaičius dalija prieš jį esančių skaičių sumą. Koks trečiasis skaičius, jeigu pirmasis skaičius yra 37, o antrasis yra 1?

   Pastaba. Jeigu $a = b \cdot q$, tai sakoma, kad *skaičius a dalijasi iš b* arba *skaičius b dalija skaičių a.*

4. Raskite sumą
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!;$$
   čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ (*skaičiaus n faktorialas*).

5. Duoti sveikieji skaičiai a, b, $a \neq \pm b$. Įrodykite, kad
$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geqslant 1.$$

6. Tegu c yra stačiojo trikampio įžambinės ilgis, o jo statinių ilgiai yra a ir b. Įrodykite, kad $a + b \leqslant c\sqrt{2}$. Kada nelygybė virsta lygybe?

7. Ar egzistuoja tokie realieji skaičiai b ir c, kad kiekviena iš lygčių
$$x^2 + bx + c = 0$$
   ir
$$2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$$
   turėtų po du sveikuosius sprendinius?

8. Įrodykite, kad į vienetinį apskritimą (jo spindulys lygus 1) įbrėžto keturkampio trumpiausia kraštinė yra ne didesnė negu $\sqrt{2}$.

9. BD yra apskritimo, kurio centras taške O, styga. Spindulys OC kerta stygą BD taške E. Duota, kad $|DE| = 3$, $|BE| = 5$, o $|EC| = 1$. Raskite apskritimo spindulį.

10. Jono Rietaviškio anūkas turėjo 18 popieriaus skiaučių. Paėmęs vieną skiautę jis ją sukarpė į 18 mažesnių ir visas (karpytas ir nekarpytas) sumaišė. Po to vėl ištraukė skiautę, kurią sukarpęs į 18 dalių, vėl visas sumaišė. Ir taip jis žaidė toliau vis paimdamas skiautę, sukarpydamas ją į 18 dalių ir visas sumaišydamas. Kai šis žaidimas anūkui nusibodo, jis suskaičiavo, kad popieriaus skiaučių yra 2012. Ar jis nesuklydo skaičiuodamas popieriaus skiautes?

RIETAVO VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2012 m. gruodžio 7 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

1. Skaičiai nuo 1 iki 37 surašyti vienoje eilutėje tokia tvarka, kad kiekvienas skaičius dalija prieš jį esančių skaičių sumą. Koks trečiasis skaičius, jeigu pirmasis skaičius yra 37, o antrasis yra 1?

   Pastaba. Jeigu $a = b \cdot q$, tai sakoma, kad *skaičius a dalijasi iš b* arba *skaičius b dalija skaičių a.*

2. Ar egzistuoja tokie du kvadratiniai trinariai

$$ax^2 + bx + c$$

   ir

$$(a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$$

   su sveikaisiais koeficientais, kurių šaknys yra sveikieji skaičiai?

   Pastaba. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ *šaknimi* vadiname lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinį.

3. Raskite sumą

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!;$$

   čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

4. Tarkime, kad $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, o $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Įrodykite, kad $x^y = y^x$.

5. Šachmatų lentos kiekviename langelyje yra įrašytas sveikasis skaičius. Duota, kad kiekvienos eilutės skaičių suma ir kiekvieno stulpelio skaičių suma yra lyginiai skaičiai. Įrodykite, kad visų juoduose langeliuose įrašytų skaičių suma yra lyginė.

6. Duotas daugianaris $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ su sveikaisiais koeficientais $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$. Be to, yra keturi skirtingi sveikieji skaičiai $a,\ b,\ c$ ir d tokie, kad

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5.$$

   Įrodykite, kad jokiam sveikajam skaičiui k negalioja lygybė $f(k) = 8$.

7. Raskite visus realiuosius lygties

$$(x+2006)(x+2008)(x+2010)(x+2012) + 16 = 0$$

   sprendinius.

8. $ABCD$ yra keturkampis, kurio priešingos kraštinės AD ir BC yra lygios. Yra žinoma, kad kampas D yra didesnis už kampą C. Įrodykite, kad $|AC| > |BD|$.

9. Lygiakraščio trikampio kraštinėse AB ir BC parinkti taškai atitinkamai D ir K. Kraštinėje AC taškai E ir M yra tokie, kad galioja lygybė $DA + AE = KC + CM = AB$. Įrodykite, kad kampas tarp tiesių DM ir KE yra lygus $60°$.

10. Jono Rietaviškio anūkas turėjo 18 popieriaus skiaučių. Paėmęs vieną skiautę jis ją sukarpė į 18 mažesnių ir visas (karpytas ir nekarpytas) sumaišė. Po to vėl ištraukė skiautę, kurią sukarpęs į 18 dalių, vėl visas sumaišė. Ir taip jis žaidė toliau vis paimdamas skiautę, sukarpydamas ją į 18 dalių ir visas sumaišydamas. Kai šis žaidimas anūkui nusibodo, jis suskaičiavo, kad popieriaus skiaučių yra 2012. Ar jis nesuklydo skaičiuodamas popieriaus skiautes?