RIETAVO VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2012 m. gruodžio 7d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Dėžėje sudėti raudoni ir žali rutuliai. Kiekvienas rutulys sveria vieną arba du kilogramus. Žinoma, kad yra abiejų spalvų ir abiejų svorių rutulių. Įrodykite, kad atsiras du rutuliai, kurie yra ir skirtingų spalvų, ir skirtingų svorių.

   Sprendimas. Jei visi žali rutuliai yra vienodo svorio, tai bent vienas raudonas rutulys turi būti kito svorio. Jei tarp žalių rutulių yra bent du skirtingo svorio, tai bet kuris raudonas rutulys su vienu iš žalių rutulių sudarys skirtingų spalvų ir skirtingų svorių rutulių porą. □

2. Ant lentos iš eilės užrašyti skaičiai nuo 1 iki 1000. Du žaidėjai – Jonas ir Petras – paeiliui nutrina po vieną skaičių. Žaidimą pradeda Jonas ir jis tęsiamas kol ant lentos lieka tik du skaičiai. Sutarta: jeigu likusių dviejų skaičių suma dalijasi iš 3, tai laimi Jonas, jeigu nesidalija iš 3 – laimi Petras. Kokią žaidimo strategiją turi pasirinkti Petras, kad jis laimėtų?

   Sprendimas. Petras laimės pasirinkęs tokią žaidimo strategiją. Jeigu Jonas nutrina skaičių x, tada Petras nutrina skaičių $1001 - x$ ir t. t. Pasibaigus žaidimui liko nenutrinti du skaičiai y ir $1001 - y$, kurių suma 1001 nesidalija iš 3. □

3. Skaičiai nuo 1 iki 37 surašyti vienoje eilutėje tokia tvarka, kad kiekvienas skaičius dalija prieš jį esančių skaičių sumą. Koks trečiasis skaičius, jeigu pirmasis skaičius yra 37, o antrasis yra 1? *Pastaba.* Jeigu $a = b \cdot q$, tai sakoma, kad *skaičius a dalijasi iš b* arba *skaičius b dalija skaičių a*.

   Sprendimas. Trečiasis skaičius turi dalyti pirmųjų dviejų skaičių sumą, kuri lygi 38. Taigi trečiasis skaičius gali būti arba 2, arba 19. Įrodysime, kad šis skaičius negali būti 19. Pažymėkime paskutinįjį skaičių x. Jis turi dalyti visų prieš jį esančių skaičių sumą $37 \cdot 19 - x$, taigi ir skaičių $37 \cdot 19$. Skaičius x negali būti lygus nei 37, nei 1, todėl paskutinysis skaičius $x = 19$. Vadinasi, trečiasis skaičius yra 2. Galima rasti visą šių skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą, seką. Štai viena iš tokių sekų: 37, 1, 2, 4, 11, 5, 3, 7, 14, 6, 15, 35, 28, 8, 22, 33, 21, 18, 27, 9, 34, 20, 12, 31, 13, 32, 16, 29, 17, 30, 10, 25, 23, 26, 24, 36, 19. □

4. Raskite sumą $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$; čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ (*skaičiaus n faktorialas*).

   Sprendimas. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n! =$
   $= (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + (n+1-1) \cdot n! =$
   $= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots + n! - (n-1)! + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$ □

5. Duoti sveikieji skaičiai a, b, $a \neq \pm b$. Įrodykite, kad

   $$\left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geqslant 1.$$

   Sprendimas. Jei a ir b yra to paties ženklo, tai trupmenos modulis yra didesnis už 1, rodiklis teigiamas, todėl visas reiškinys didesnis už 1. Jei a ir b yra skirtingų ženklų, tada trupmenos modulis yra mažesnis už 1, tačiau rodiklis neigiamas, todėl visas reiškinys didesnis už 1. □

6. Tegu c yra stačiojo trikampio įžambinės ilgis, o jo statinių ilgiai yra a ir b. Įrodykite, kad $a + b \leqslant c\sqrt{2}$. Kada nelygybė virsta lygybe?

Sprendimas. Pirmiau įrodykime, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais $a, b \geqslant 0$ galioja kvadratinio - aritmetinio vidurkių nelygybė

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Tuo tikslu pakelkime abi nelygybės puses kvadratu. Gauname nelygybę

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

o ją pertvarkę, turėsime nelygybę, ekvivalenčią pradinei, kuri tikrai galioja:

$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Dabar į kvadratinio - aritmetinio vidurkių nelygybę įrašę $a^2+b^2=c^2$, turime

$$\sqrt{\frac{c^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Padauginę abi šios nelygybės puses iš 2, gauname norimą nelygybę, kuri tampa lygybe tada ir tik tada, kai $a=b$. $\square$

7. Ar egzistuoja tokie realieji skaičiai b ir c, kad kiekviena iš lygčių $x^2+bx+c=0$ ir $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ turėtų po du sveikuosius sprendinius?

   Sprendimas. Ne. Tarkime, egzistuoja tokie realieji skaičiai b ir c, kad abi lygtys turi po du sveikuosius sprendinius. Iš antros lygties gauname, kad $b+1$ ir $c+1$ yra sveikieji lyginiai skaičiai, nes lygties sprendinių suma $-\frac{b+1}{2}$ ir sprendinių sandauga $\frac{c+1}{2}$ – sveikieji skaičiai. Todėl c ir b abu yra nelyginiai. Tuomet pirmos lygties sprendiniai yra nelyginiai skaičiai (nes jų sandauga c yra nelyginė). Tačiau tada sprendinių suma $-b$ (taip pat ir b) turėtų būti lyginis skaičius. Gavome prieštarą. Darome išvadą, kad nėra tokių skaičių b ir c, kad kiekviena iš duotųjų lygčių turėtų po du sveikuosius sprendinius. $\square$

8. Įrodykite, kad į vienetinį apskritimą (jo spindulys lygus 1) įbrėžto keturkampio trumpiausia kraštinė yra ne didesnė negu $\sqrt{2}$.

   Sprendimas. Tegu O yra vienetinio apskritimo centras, o AB – trumpiausia įbrėžto keturkampio kraštinė. Tada $\angle AOB \leqslant 90°$, nes trumpiausią kraštinę atitinka mažiausias centrinis kampas. Trumpiausios kraštinės AB ilgis bus didžiausias, kai $\angle AOB$ bus didžiausias, tai yra lygus $90°$. Todėl $|AB| \leqslant \sqrt{2}$. $\square$

9. BD yra apskritimo, kurio centras taške O, styga. Spindulys OC kerta stygą BD taške E. Duota, kad $|DE|=3$, $|BE|=5$, o $|EC|=1$. Raskite apskritimo spindulį.

   Sprendimas. Pratęskime spindulį CO iki susikirtimo su apskritimu; tegu F – jų susikirtimo taškas. Pažymėkime apskritimo spindulio ilgį raide r. Iš stygų sankirtos teoremos žinome, kad $|DE||BE|=|EC||EF|$. Įrašę žinomus dydžius gauname: $3\cdot 5 = 1\cdot(2r-1)$. Todėl $r=8$. $\square$

10. Jono Rietaviškio anūkas turėjo 18 popieriaus skiaučių. Paėmęs vieną skiautę jis ją sukarpė į 18 mažesnių ir visas (karpytas ir nekarpytas) sumaišė. Po to vėl ištraukė skiautę, kurią sukarpęs į 18 dalių, vėl visas sumaišė. Ir taip jis žaidė toliau vis paimdamas skiautę, sukarpydamas ją į 18 dalių ir visas sumaišydamas. Kai šis žaidimas anūkui nusibodo, jis suskaičiavo, kad popieriaus skiaučių yra 2012. Ar jis nesuklydo skaičiuodamas popieriaus skiautes?

    Sprendimas. Po kiekvieno karpymo skiaučių skaičius padidėja 17 vienetų. Taigi po k karpymų jų bus $18+17k = 17(k+1)+1$ arba, kitaip tariant, skiaučių skaičių dalydami iš 17 turime gauti liekaną 1. Tačiau 2012 dalydami iš 17 gauname liekaną 6. Taigi Jono Rietaviškio anūkas skaičiuodamas skiautes suklydo. $\square$

RIETAVO VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2012 m. gruodžio 7d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Skaičiai nuo 1 iki 37 surašyti vienoje eilutėje tokia tvarka, kad kiekvienas skaičius dalija prieš jį esančių skaičių sumą. Koks trečiasis skaičius, jeigu pirmasis skaičius yra 37, o antrasis yra 1? *Pastaba.* Jeigu $a = b \cdot q$, tai sakoma, kad *skaičius a dalijasi iš b* arba *skaičius b dalija skaičių a.*

   Sprendimas. Trečiasis skaičius turi dalyti pirmųjų dviejų skaičių sumą, kuri lygi 38. Taigi trečiasis skaičius gali būti arba 2, arba 19. Įrodysime, kad šis skaičius negali būti 19. Pažymėkime paskutinįjį skaičių x. Jis turi dalyti visų prieš jį esančių skaičių sumą $37 \cdot 19 - x$, taigi ir skaičių $37 \cdot 19$. Skaičius x negali būti lygus nei 37, nei 1, todėl paskutinysis skaičius $x = 19$. Vadinasi, trečiasis skaičius yra 2. Galima rasti visą šių skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą, seką. Štai viena iš tokių sekų: 37, 1, 2, 4, 11, 5, 3, 7, 14, 6, 15, 35, 28, 8, 22, 33, 21, 18, 27, 9, 34, 20, 12, 31, 13, 32, 16, 29, 17, 30, 10, 25, 23, 26, 24, 36, 19. $\square$

2. Ar egzistuoja tokie du kvadratiniai trinariai ax^2+bx+c ir $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ su sveikaisiais koeficientais, kurių šaknys yra sveikieji skaičiai?

   Pastaba. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ *šaknimi* vadiname lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinį.

   Sprendimas. Ne. Tarkime tokie kvadratiniai trinariai egzistuoja. Nagrinėsime du atvejus. Jei a yra lyginis, tada iš pirmojo kvadratinio trinario gauname, kad b ir c taip pat yra lyginiai, nes b ir c dalijasi iš a (išplaukia iš Vieto teoremos, nes šaknys – sveikieji skaičiai). Tuomet trinario $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + c + 1$ koeficientai yra nelyginiai skaičiai, bet taip būti negali. Jei a yra nelyginis, tada $a+1$ yra lyginis, todėl $b+1$ ir $c+1$ yra lyginiai. Tokiu atveju trinario ax^2+bx+c koeficientai yra nelyginiai, bet taip būti irgi negali. Abiem atvejais gauname prieštarą, todėl tokie du kvadratiniai trinariai neegzistuoja. $\square$

3. Raskite sumą $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$, kur $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

   Sprendimas. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n! =$
   $= (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + (n+1-1) \cdot n! =$
   $= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots + n! - (n-1)! + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$ $\square$

4. Tarkime, kad $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, o $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Įrodykite, kad $x^y = y^x$.

   Sprendimas. $x \ln y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
   $= \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = y \ln x.$ $\square$

5. Šachmatų lentos kiekviename langelyje yra įrašytas sveikasis skaičius. Duota, kad kiekvienos eilutės skaičių suma ir kiekvieno stulpelio skaičių suma yra lyginiai skaičiai. Įrodykite, kad visų juoduose langeliuose įrašytų skaičių suma yra lyginė.

   Sprendimas. Sakykime, kad apatinis kairysis langelis yra juodas. Pirmos (nuo apačios), trečios ir t. t. eilučių ir antro (iš kairės), ketvirto ir t. t. stulpelių suma yra lygi visų juodų langelių ir dukart kai kurių baltų langelių sumai. Kadangi ši suma lyginė, tai juodų langelių suma turi būti taip pat lyginė. $\square$

6. Duotas daugianaris $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ su sveikaisiais koeficientais $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$. Be to, yra keturi skirtingi sveikieji skaičiai a, b, c ir d tokie, kad
$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5.$$
Įrodykite, kad jokiam sveikajam skaičiui k negalioja lygybė $f(k) = 8$.

Sprendimas. Užrašykime duotąjį daugianarį taip: $f(x) = g(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+5$; čia $g(x)$ yra daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Tarkime, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius k, kad $f(k) = 8$. Tada keturi skirtingi skaičiai $(k-a)$, $(k-b)$, $(k-c)$ ir $(k-d)$ turi dalyti 3. Tik vienas iš jų gali būti 3 arba -3, o kitų trijų sandauga turėtų būti lygi 1 arba -1. Kadangi visi skaičiai skirtingi, taip būti negali. Todėl nėra tokio sveikojo skaičiaus k, su kuriuo $f(k) = 8$. $\square$

7. Raskite visus realiuosius lygties
$$(x + 2006)(x + 2008)(x + 2010)(x + 2012) + 16 = 0$$
sprendinius.

Sprendimas. Pažymėkime $y = x + 2009$. Tada lygtį perrašome taip: $(y-3)(y-1)(y+1)(y+3)+16 = 0$. Pritaikę kvadratų skirtumo formulę gauname $(y^2-9)(y^2-1)+16 = 0$. Pažymėkime $z = y^2$. Atskliaudę ir sutraukę panašius narius gausime: $z^2 - 10z + 25 = 0$. Pasinaudoję sumos kvadrato formule turime $(z-5)^2 = 0$. Šios lygties vieninteis sprendinys yra $z = 5$. Taigi, $y = \pm\sqrt{5}$, o pradinės lygties sprendiniai yra $x = \pm\sqrt{5} - 2009$.

$\square$

8. $ABCD$ yra keturkampis, kurio priešingos kraštinės AD ir BC yra lygios. Yra žinoma, kad kampas D yra didesnis už kampą C. Įrodykite, kad $|AC| > |BD|$.

Sprendimas. Pagal kosinusų teoremą, $|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||CD|\cos(\angle D)$, o $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC||CD|\cos(\angle C)$. Iš sąlygos $\angle D > \angle C$, todėl $\cos(\angle C) > \cos(\angle D)$. Taigi,
$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||CD|\cos(\angle D) =$
$|BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC||CD|\cos(\angle D) > |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC||CD|\cos(\angle C) = |BD|^2$. $\square$

9. Lygiakraščio trikampio kraštinėse AB ir BC parinkti taškai atitinkamai D ir K. Kraštinėje AC taškai E ir M yra tokie, kad galioja lygybė $DA+AE = KC+CM = AB$. Įrodykite, kad kampas tarp tiesių DM ir KE yra lygus 60°.

Sprendimas. Iš sąlygos $CE = AC - AE = AD$. Panašiai $CK = AM$. Pasukus trikampį 120° laipsnių kampu pagal laikrodžio rodyklę apie trikampio centrą, taškas K atsiduria taško M vietoje, o taškas E – taško D vietoje. Tiesių DM ir KE susikirtimo tašką pažymėkime F. Po trikampio pasukimo tiesė KE atsiduria tiesės DM vietoje, o tiesė DM – tiesės KE vietoje, todėl kampas EFD lygus 120° arba 60°. Abiem atvejais mažesnysis kampas tarp tiesių DM ir KE yra lygus 60°. $\square$

10. Jono Rietaviškio anūkas turėjo 18 popieriaus skiaučių. Paėmęs vieną skiautę jis ją sukarpė į 18 mažesnių ir visas (karpytas ir nekarpytas) sumaišė. Po to vėl ištraukė skiautę, kurią sukarpęs į 18 dalių, vėl visas sumaišė. Ir taip jis žaidė toliau vis paimdamas skiautę, sukarpydamas ją į 18 dalių ir visas sumaišydamas. Kai šis žaidimas anūkui nusibodo, jis suskaičiavo, kad popieriaus skiaučių yra 2012. Ar jis nesuklydo skaičiuodamas popieriaus skiautes?

Sprendimas. Po kiekvieno karpymo skiaučių skaičius padidėja 17 vienetų. Taigi po k karpymų jų bus $18 + 17k = 17(k+1) + 1$ arba, kitaip tariant, skiaučių skaičių dalydami iš 17 turime gauti liekaną 1. Tačiau 2012 dalydami iš 17 gauname liekaną 6. Taigi Jono Rietaviškio anūkas skaičiuodamas skiautes suklydo. $\square$