RIETAVO DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2013 m. gruodžio 6 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė - 2 val.

1. Raskite x, jeigu $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{x}$.

2. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta su visais realiaisiais x ir tenkina lygtį $f(2x)=2f(x)+1$. Apskaičiuokite $f(1)$, jei $f(8)=16$.

3. Įrodykite, kad:

   (a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$;

   (b) $\sqrt{76-42\sqrt{3}}+\sqrt{31+12\sqrt{3}}$ yra sveikasis skaičius.

4. Jonas Rietaviškis kasmet švenčia Joninės. Atšventęs šiemetines Jonines, Jonas pastebėjo, kad ši diena buvo pirmadienis, kaip ir prieš 28-erius metus, kai jis pirmą kartą minėjo savo vardo dieną. Jonas Rietaviškis neturi kalendoriaus, tačiau žino, kad metuose yra 365 dienos, o kas ketverius metus išpuolantys keliamieji metai yra viena diena ilgesni. Kiek kartų per šį laikotarpį jis šventė Jonines pirmadienį?

5. Raskite rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį, jei viena rombo įstrižainė yra dvigubai ilgesnė už kitą.

6. Lygiašonės trapecijos pagrindo ilgis yra 3, o du kampai prie jo - po $60°$. Be to, į ją galima įbrėžti apskritimą. Raskite tos trapecijos aukštinę.

7. Ant stalo yra dvi krūvelės akmenukų – vienoje yra 13, kitoje – 2013. Kęstutis ir Akvilė žaidžia tokį žaidimą. Jie paeiliui iš bet kurios krūvelės (iš vienos) ima bet kurį akmenukų skaičių ir taip žaidžia kol ant stalo nebelieka nė vieno. Laimi tas, kas paima paskutinį akmenuką. Pirmoji pradeda Akvilė. Ar gali Akvilė laimėti prieš Kęstutį kad ir kaip jis žaistų? Jeigu taip, nurodykite, kaip Akvilė turi žaisti.

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais n^4+n^2+1 yra pirminis.

9. Įrodykite, kad tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga.

   Du natūralieji skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jų didžiausias bendras daliklis lygus vienam.

10. Ant kiekvieno 16×30 matmenų lentos langelio tupi po musę. Jei du langeliai turi bendrą kraštinę, tai juose tupinčios musės vadinamos kaimynėmis. Pabaidytos musės visos nuskrenda ir sutupia po vieną kiekviename kitos lentos, kurios matmenys yra 15×32, langelyje. Ar gali jos sutūpti taip, kad kaimynės pirmoje lentoje būtų kaimynėmis ir kitoje lentoje?

RIETAVO DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2013 m. gruodžio 6 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė - 2 val.

1. Įrodykite, kad $\sqrt{76-42\sqrt{3}}+\sqrt{31+12\sqrt{3}}$ yra sveikasis skaičius.

2. Jonas Rietaviškis kasmet švenčia Jonines. Atšventęs šiemetines Jonines, Jonas pastebėjo, kad ši diena buvo pirmadienis, kaip ir prieš 28-erius metus, kai jis pirmą kartą minėjo savo vardo dieną. Jonas Rietaviškis neturi kalendoriaus, tačiau žino, kad metuose yra 365 dienos, o kas ketverius metus išpuolantys keliamieji metai yra viena diena ilgesni. Kiek kartų per šį laikotarpį jis šventė Jonines pirmadienį?

3. Skritulio formos pica dviem statmenais pjūviais buvo supjaustyta į keturias dalis. Paulius paėmė didžiausiąją ir mažiausiąją iš jų, o Ugnei atiteko dvi likusios dalys. Ar galėjo Ugnei atitekti daugiau picos negu Pauliui?

4. Raskite rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį, jei viena rombo įstrižainė yra dvigubai ilgesnė už kitą.

5. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB, o taškas N – kraštinėje BC. Be to, $|AM| = 2|MB|$, $|BN| = 2|NC|$ ir $\angle ACB = 2\angle MNB$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis.

6. Racionalieji skaičiai $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{19}$ sudaro tokią aritmetinę progresiją, kad
$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 448.$$
   (a) Raskite sumą $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19}$.
   (b) Ar gali vienuoliktasis šios progresijos narys a_{11} būti lygus $\frac{2013}{20}$?
   (c) Ar gali septintasis šios progresijos narys a_7 būti lygus $\frac{2013}{19}$?

7. Įrodykite, kad tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga.

   Du natūralieji skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jų didžiausias bendras daliklis lygus vienam.

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis.

9. (a) Raskite bent vieną lygties $x^{2013} + y^{2013} = z^{2014}$ sveikąjį sprendinį (x, y, z).
   (b) Įrodykite, kad ši lygtis turi be galo daug sveikųjų sprendinių.

10. Raskite sumą
$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{2013}{2011!+2012!+2013!}.$$