



# Rietavo XIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas  
2014–11–14  
9-10 klasės

**1 uždavinys.** Įrodykite, kad:

- lygiakraštis trikampis gali būti sukarpytas į 7 lygiakraščius (nebūtinai lygius) trikampius;
- lygiakraštis trikampis gali būti sukarpytas į 2014 lygiakraščių (nebūtinai lygių) trikampių.

**2 uždavinys.** Su kokiais  $A$  ir  $B$  reikšmėmis skaičius  $A1234567B$  dalijasi iš 45?

**3 uždavinys.** Ant  $3 \times 5$  lentos, sudarytos iš  $1 \times 1$  kvadratėlių, Birutė ir Kęstutis paeiliui spalvina įvairaus dydžio kvadratus:  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ , arba  $3 \times 3$ . Jokie du kvadratai negali persidengti. Žaidimą pralaimi tas, kuris nebegali nuspalvinti jokio kvadrato. Kaip turi žaisti Birutė, jei ji pradeda ir nori laimėti?

**4 uždavinys.** Raskite visas sveikųjų skaičių poras  $(m, n)$ , tenkinančias lygtį  $2^{2m} - 3^{2n} = 55$ .

**5 uždavinys.** Matas, Paulius ir Tomas yra identiškai trynukai - jų neįmanoma atskirti iš išvaizdos. Matas ir Paulius visada sako tiesą, o Tomas visada meluoja - viskas, ką jis pasako, yra melas. Yra žinoma, kad trynukų amžius yra tarp 20 ir 30 metų imtinai. Vieną dieną kaimynas sutiko einančius du iš trijų brolių ir paklausė, kiek jiems metų. Pirmas pasakė, kad jiems yra tarp 20 ir 29 metų imtinai, o antras pasakė, kad jiems yra tarp 21 ir 30 metų (žinoma, irgi imtinai) ir pridūrė, kad vienas iš jų meluoja. Kiek jiems metų?

**6 uždavinys.**  $A$  yra dviženklis natūralusis skaičius, o  $B$  – triženklis. Žinome, kad  $A$  padidinę  $B\%$  gauname tą patį skaičių, kaip ir  $B$  sumažinę  $A\%$ . Raskite visas galimas  $(A, B)$  poras.

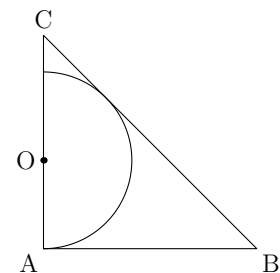
**7 uždavinys.** Trikampio  $ABC$  kraštinėje  $AC$  pažymėtas toks taškas  $D$ , kad  $AB = AD$ . Be to,  $\angle ABC - \angle ACB = 30^\circ$ . Raskite kampą  $\angle CBD$ .

**8 uždavinys.** Jonas Rietaviškis naktį sapnavo, kaip važiuoja dviračiu Žemaičių plentu, o bevažiuodamas skaičiuoja medžiuose tupinčias varnas. Ir sapnuojasi jam, kad paėmus bet kuriuos penkis iš eilės augančius medžius, ten kartu sudėjus tupi ne mažiau kaip 50 varnų, tačiau paėmus pirmus vienuolika medžių, juose tupinčių varnų skaičius bus mažesnis už 110. Pabudęs Jonas Rietaviškis susimąstė, pamąstykite ir jūs: ar taip galėjo būti iš tiesų, ar tik prisisapnuoti.

**9 uždavinys.** Šią akimirką laikrodžio valandinė ir minutinė rodyklės sudaro ištiestinį kampą. Po kiek laiko jos vėl sudarys tokį kampą? Kiek kartų per parą šitaip atsitinka?

**10 uždavinys.**

Į statųjį lygiašonį trikampį  $ABC$ , kurio statinis  $AC$  lygus 1, įbrėžtas pusapskritimis. Jo centras  $O$  priklauso statiniui  $AC$ . Raskite pusapskritimio spindulio  $AO$  ilgį.





# Rietavo XIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas  
2014–11–14  
11-12 klasės

---

**1 uždavinys.** Įrodykite, kad tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kurio tikrinių daliklių suma yra didesnė už jį patį. (*Tikrinis  $n$  daliklis* yra natūralusis skaičius dalijantis  $n$  ir nelygus nei 1, nei  $n$ .)

**2 uždavinys.** Tarkime  $a$  yra sveikasis skaičius, o  $p$  yra pirminis skaičius, kuris dalija ir  $5a - 1$ , ir  $a - 10$ . Įrodykite, kad  $p$  dalija ir  $a - 3$ .

**3 uždavinys.** Raskite visas  $x$  ir  $y$  reikšmių poras, su kuriomis teisinga nelygybė  $4x^2 + 6y^2 + 3 > 4x(2y + 1)$ .

**4 uždavinys.** Įrodykite, kad kvadratas gali būti sukarpytas į  $n$  kvadratų su visais  $n \geq 6$ .

**5 uždavinys.** Funkcija  $f(x)$  apibrėžta su visais sveikaisiais skaičiais  $x$ . Bet to, su visais  $x$  ir  $y$   $f(x + y) = f(xy)$  ir  $f(1) = 2$ . Raskite  $f(2014)$  reikšmę.

**6 uždavinys.** Į trikampį  $ABC$ , kurio kampas  $A = 60^\circ$ , įbrėžtas apskritimas liečia kraštinę  $AB$  taške  $D$ . Raskite  $BC$  ilgį, jei  $|AD| = 5$ , o  $|DB| = 3$ .

**7 uždavinys.** Dviejų kvadratų bendras plotas yra lygus 1. Ar visada juos galima sutalpinti į kvadratą, kurio plotas lygus 2?

**8 uždavinys.**  $A$  yra dviženklis natūralusis skaičius, o  $B$  – triženklis. Jonas Rietaviškis pastebėjo, kad  $A$  padidinę  $B\%$  gauname tą patį skaičių, kaip ir  $B$  sumažinę  $A\%$ . Raskite visas galimas  $(A, B)$  poras.

**9 uždavinys.** Su kokiais sveikaisiais skaičiais  $n$  reiškinys  $\frac{n+3}{n-1}$  taip pat yra sveikasis skaičius?

**10 uždavinys.** Jonas Rietaviškis sapnavo kaip važiuoja dviračiu Žemaičių plentu, o bevažiuodamas skaičiuoja medžiuose tupinčias varnas. Ir sapnuojasi jam, kad paėmus bet kuriuos penkis iš eilės augančius medžius, ten kartu sudėjus tupi ne mažiau kaip 50 varnų, tačiau paėmus pirmus vienuolika medžių, juose tupinčių varnų skaičius bus mažesnis už 110. Pabudęs Jonas Rietaviškis susimąstė, pamąstykite ir jūs: ar taip galėjo būti iš tiesų, ar tik prisispantuoti.