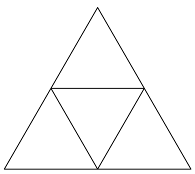
Rietavo XIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas
2014–11–14
9-10 klasės

---

1 uždavinys. Įrodykite, kad:
a) lygiakraštis trikampis gali būti sukarpytas į 7 lygiakraščius (nebūtinai lygius) trikampius;
b) lygiakraštis trikampis gali būti sukarpytas į 2014 lygiakraščių (nebūtinai lygių) trikampių.

Sprendimas.



1 pav.

a) Trikampis gali būti sukarpytas į 4 lygiakraščius trikampius taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada bet kurį atkirptą trikampį galime vėl sukarpyti į 4 lygiakraščius trikampius. Taip gauname 7 trikampius.
b) Kaip parodyta a) dalyje, lygiakraštį trikampį galima sukarpyti į 4 dalis. Tada paėmę vieną dalį vėl sukarpyti tokiu pačiu būdu ir t. t. Po kiekvieno tokio sukarpymo gausime $3n+1$ trikampius. Tada po 671 sukarpymo gausime $3\cdot 671+1=2014$ trikampius.

. ◀

2 uždavinys. Su kokiomis A ir B reikšmėmis skaičius $A1234567B$ dalijasi iš 45?

Sprendimas. Skaičius $A1234567B$ dalijasi iš 45, todėl jis dalijasi iš 9 ir 5. Pagal dalumo iš 9 požymį $A+B+28$ dalijasi iš 9, o pagal dalumo iš 5 požymį B lygus 0 arba 5. Jei $B=0$, tada $A+28$ dalijasi iš 9, todėl $A=8$. Jei $B=5$, tada $A+33$ dalijasi iš 9, todėl $A=3$. Taigi yra dvi galimos A ir B reikšmių poros: $(0,8)$ ir $(5,3)$. ◀

3 uždavinys. Ant 3×5 lentos, sudarytos iš 1×1 kvadratėlių, Birutė ir Kęstutis paeiliui spalvina įvairaus dydžio kvadratus: 1×1, 2×2, arba 3×3. Jokie du kvadratai negali persidengti. Žaidimą pralaimi tas, kuris nebegali nuspalvinti jokio kvadrato. Kaip turi žaisti Birutė, jei ji pradeda ir nori laimėti?

Sprendimas. Pirmu ėjimu Birutė nuspalvina 3×3 kvadratą lentos viduryje. Taip lieka tik du šoniniai 1×3 stulpeliai. Kitais ėjimais žaidėjai galės spalvinti tik 1×1 kvadratus. Kadangi po pirmo ėjimo kvadratėlių liko 6, tai kaip Kęstutis bespalvintų, laimės Birutė. ◀

4 uždavinys. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (m,n), tenkinančias lygtį $2^{2m}-3^{2n}=55$.

Sprendimas. $2^{2m}-3^{2n}=(2^m-3^n)(2^m+3^n)=55$. Taigi, arba $2^m-3^n=1$ ir $2^m+3^n=55$, arba $2^m-3^n=5$ ir $2^m+3^n=11$. Pirmu atveju gauname, kad $2^m=28$ ir $3^n=27$, tačiau m nėra sveikasis skaičius. Antru atveju gauname, kad $2^m=8$ ir $3^n=3$, todėl vienintelė pora yra $(m,n)=(3,1)$. ◀

5 uždavinys. Matas, Paulius ir Tomas yra identiški trynukai - jų neįmanoma atskirti iš išvaizdos. Matas ir Paulius visada sako tiesą, o Tomas visada meluoja - viskas, ką jis pasako, yra melas. Yra žinoma, kad trynukų amžius yra tarp 20 ir 30 metų imtinai. Vieną dieną kaimynas sutiko einančius du iš trijų brolių ir paklausė, kiek jiems metų. Pirmas pasakė, kad jiems yra tarp 20 ir 29 metų imtinai, o antras pasakė, kad jiems yra tarp 21 ir 30 metų (žinoma, irgi imtinai) ir pridūrė, kad vienas iš jųdviejų meluoja. Kiek jiems metų?

Sprendimas. Tarkime, kad antrasis sutiktas trynukas yra Tomas, kuris visada meluoja. Tada jo teiginys, kad vienas iš jųdviejų meluoja, yra neteisingas. Todėl jie abu turėjo sakyti tiesą. Bet taip būti negali, nes vienas iš jų meluoja. Taigi antrasis trynukas sako tiesą, pirmasis meluoja ir iš čia jau išplaukia, kad jiems nėra tarp 20 ir 29. Lieka, kad jiems yra 30 metų. ◀

6 uždavinys. A yra dviženklis natūralusis skaičius, o B – triženklis. Žinome, kad A padidinę $B\%$ gauname tą patį skaičių, kaip ir B sumažinę $A\%$. Raskite visas galimas (A,B) poras.

Sprendimas. Pagal sąlygą
$$A \cdot \left(1 + \frac{B}{100}\right) = B \cdot \left(1 - \frac{A}{100}\right).$$
Išreiškę B, gauname
$$B = \frac{50A}{50 - A} = -50 + \frac{2500}{50 - A}.$$
Kadangi $B \geqslant 100$, iš paskutiniosios lygybės gauname, kad $50 - A > 0$ ir $50 - A < 17$. Nagrinėkime 2500 daliklius, kurie yra mažesni už 17, t. y. 2, 4, 5, 10. Jei $50 - A = 2$, tada $B = 1200$, o tai prieštarauja sąlygai, kad B yra triženklis. Likę trys dalikliai atitinka tris (A, B) poras: $(46, 575)$, $(45, 450)$ ir $(40, 200)$. ◀

7 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėje AC pažymėtas toks taškas D, kad $AB = AD$. Be to, $\angle ABC - \angle ACB = 30°$. Raskite kampą $\angle CBD$.

Sprendimas. Trikampis ABD yra lygiašonis, todėl $\angle ADB = \angle ABD = x$. Pažymėkime $\angle ACB = y$. Žinome, kad trikampio kampo priekampis yra lygus kitų dviejų trikampio kampų sumai. Kampas $\angle ADB$ yra $\angle CDB$ priekampis, todėl $\angle ADB = \angle DCB + \angle CBD$. Vadinasi, $x = y + \angle CBD$, o iš čia $\angle CBD = x - y$. Tuomet iš duotos sąlygos $30° = \angle ABC - \angle ACB = (x + x - y) - y = 2(x - y)$, ir $\angle CBD = x - y = 15°$. ◀

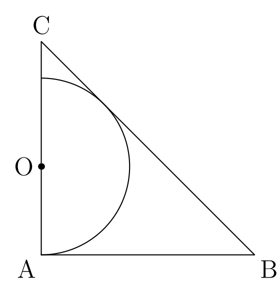
8 uždavinys. Jonas Rietaviškis naktį sapnavo, kaip važiuoja dviračiu Žemaičių plentu, o bevažiuodamas skaičiuoja medžiuose tupinčias varnas. Ir sapnuojasi jam, kad paėmus bet kuriuos penkis iš eilės augančius medžius, ten kartu sudėjus tupi ne mažiau kaip 50 varnų, tačiau paėmus pirmus vienuolika medžių, juose tupinčių varnų skaičius bus mažesnis už 110. Pabudęs Jonas Rietaviškis susimąstė, pamąstykite ir jūs: ar taip galėjo būti iš tiesų, ar tik prisisapnuoti.

Sprendimas. Taip, iš tiesų taip gali būti. Pavyzdžiui, varnų išsidėstymą pirmuose 11 medžių galėtų atitikti tokia skaičių seka: $3, 12, 12, 12, 12, 3, 12, 12, 12, 12, 3$. Jos bet kurių gretimų penkių narių suma lygi $4 \cdot 12 + 3 = 51$, o visų narių suma bus $8 \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 105$. ◀

9 uždavinys. Šią akimirką laikrodžio valandinė ir minutinė rodyklės sudaro ištiestinį kampą. Po kiek laiko jos vėl sudarys tokį kampą? Kiek kartų per parą šitaip atsitinka?

Sprendimas. Valandinė rodyklė per valandą pasisuka $30°$, o minutinė – $360°$. Taigi skirtumas tarp jų keičiasi $330°$ per valandą greičiu. Ištiestinį kampą rodyklės vėl sudarys, kai skirtumas tarp jų nueitų kampų bus lygus $360°$, o taip bus po $360 : 330 = 1\frac{1}{11}$ valandos. Per parą ištiestinį kampą jos sudarys $24 : \frac{12}{11} = 22$ kartus. ◀

10 uždavinys.
Į statųjį lygiašonį trikampį ABC, kurio statinis AC lygus 1, įbrėžtas pusapskritimis. Jo centras O priklauso statiniui AC. Raskite pusapskritimio spindulio AO ilgį.



Sprendimas. Tašką, kuriame pusapskritimis liečia įžambinę BC pažymėkime raide D. Trikampis ABC yra lygiašonis, todėl $AC = AB = 1$, o $BC = \sqrt{2}$. BA ir BD yra apskritimo liestinės nubrėžtos iš taško B, todėl $BA = BD = 1$. Trikampis CDO yra panašus į trikampį ABC, todėl $|CD| = |OD| = |BC| - |BD| = \sqrt{2} - 1$. ◀

Rietavo XIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas
2014–11–14
11-12 klasės

---

1 uždavinys. Įrodykite, kad tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kurio tikrinių daliklių suma yra didesnė už jį patį. (*Tikrinis n daliklis* yra natūralusis skaičius dalijantis n ir nelygus nei 1, nei n.)

Sprendimas. Tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių bent 1 dalijasi iš 12. Pažymėkime jį $a = 12n$. Tada skaičiai $2n$, $3n$, $4n$, $6n$ yra tikriniai a dalikliai, o jų suma lygi $15n > a$. ◀

2 uždavinys. Tarkime a yra sveikasis skaičius, o p yra pirminis skaičius, kuris dalija ir $5a-1$, ir $a-10$. Įrodykite, kad p dalija ir $a-3$.

Sprendimas. Kadangi p dalija $5a-1$ ir $a-10$, tai p dalija ir $5a-1-5(a-10) = 49$. Todėl $p = 7$ ir p dalija $a-3 = a-10+7$. ◀

3 uždavinys. Raskite visas x ir y reikšmių poras, su kuriomis teisinga nelygybė $4x^2+6y^2+3 > 4x(2y+1)$.

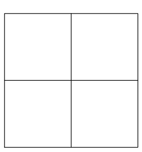
Sprendimas. Išskyrę pilnus kvadratus duotąją nelygybę perrašykime taip: $(2x-2y-1)^2 + 2(y-1)^2 > 0$. Ji galioja visuomet, išskyrus atvejį, kai $2x-2y-1 = 0$ ir $y-1 = 0$. Vadinasi, duotoji nelygybė teisinga, kai $(x;y) \neq (\frac{3}{2};1)$. ◀

4 uždavinys. Įrodykite, kad kvadratas gali būti sukarpytas į n kvadratų su visais $n \geqslant 6$.

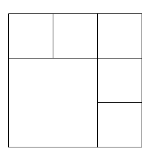
Sprendimas. Kvadratą galima sukarpyti į 4 kvadratėlius kaip parodyta 1 pav. Pasirinkę bet kurį kvadratėlį jį vėl galime sukarpyti į 4 ir t. t. Tokiu būdu galime gauti kvadrato padalijimą į $4+3k$ kvadratėlių.

Kvadratą į 6 kvadratėlius galima sukarpyti 2 pav. nurodytu būdu. Tada pasirinkę bet kurį ir sukarpę į 4 dalis kaip ir pirmu atveju, galime gauti kvadrato padalijimą į $6+3k$ dalių.

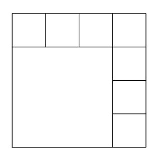
Galiausiai, kvadratą į 8 kvadratėlius galima sukarpyti 3 pav. nurodytu būdu. Kaip ir ankstesniais atvejais karpydami kvadratėlius į 4 mažesnius galime gauti $8+3k$ dalis.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

Kiekvienas natūralusis skaičius n didesnis už 5 gali būti užrašomas vienu iš nurodytų būdų ($4+3k$, $6+3k$, arba $8+3k$, su kokiu nors k). Taigi kvadratą galima sukarpyti į n kvadratų. ◀

5 uždavinys. Funkcija $f(x)$ apibrėžta su visais sveikaisiais skaičiais x. Bet to, su visais x ir y $f(x+y) = f(xy)$ ir $f(1) = 2$. Raskite $f(2014)$ reikšmę.

Sprendimas. Vietoje y įrašę 1 gauname $f(x+1) = f(x)$, todėl $f(1) = f(2) = \cdots = f(2014) = 2$. ◀

Rietavo XIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas
2014–11–14
11-12 klasės

6 uždavinys. Į trikampį ABC, kurio kampas $A = 60°$, įbrėžtas apskritimas liečia kraštinę AB taške D. Raskite BC ilgį, jei $|AD| = 5$, o $|DB| = 3$.

Sprendimas. Kitus apskritimo lietimosi taškus pažymėkime E (kraštinėje BC) ir F (kraštinėje CA). Tada $|AF| = 5$, o $|BE| = 3$. Pažymėkime $|CE| = |CF| = y$. Pagal kosinusų teoremą $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos(\angle A) = |AB|^2 + |AC|^2 - |AB||AC|$. Tą patį galima perrašyti taip: $(y + 3)^2 = 8^2 + (y + 5)^2 - 8(y + 5)$. Išsprendę lygtį, gauname $y = 10$. Taigi $|BC| = |BE| + |CE| = 13$. ◀

7 uždavinys. Dviejų kvadratų bendras plotas yra lygus 1. Ar visada juos galima sutalpinti į kvadratą, kurio plotas lygus 2?

Sprendimas. Pažymėkime dviejų kvadratų kraštinių ilgius atitinkamai x ir y $(x > 0, y > 0)$. Pagal sąlygą $x^2 + y^2 = 1$. Tuomet $x + y = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = \sqrt{1 + 2xy} \leqslant \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{2}$. Kadangi kvadratų kraštinių suma yra ne didesnė už $\sqrt{2}$, tai jie tilps į kvadratą, kurio plotas lygus 2. ◀

8 uždavinys. A yra dviženklis natūralusis skaičius, o B – triženklis. Jonas Rietaviškis pastebėjo, kad A padidinę $B\%$ gauname tą patį skaičių, kaip ir B sumažinę $A\%$. Raskite visas galimas (A, B) poras.

Sprendimas. Pagal sąlygą $A \cdot \left(1 + \frac{B}{100}\right) = B \cdot \left(1 - \frac{A}{100}\right)$. Išreiškę B, turėsime $B = \frac{50A}{50-A} = -50 + \frac{2500}{50-A}$. Kadangi $B \geqslant 100$, iš paskutiniosios lygybės gauname, kad $50 - A > 0$ ir $50 - A < 17$. Nagrinėkime 2500 daliklius, kurie yra mažesni už 17, t. y. 2, 4, 5, 10. Jei $50 - A = 2$, tada $B = 1200$, o tai prieštarauja sąlygai, kad B yra triženklis. Likę trys dalikliai atitinka tris (A, B) poras: $(46, 575)$, $(45, 450)$ ir $(40, 200)$. ◀

9 uždavinys. Su kokiais sveikaisiais skaičiais n reiškinys $\frac{n+3}{n-1}$ taip pat yra sveikasis skaičius?

Sprendimas. $\frac{n+3}{n-1} = \frac{n-1+4}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1}$. Duotas reiškinys yra sveikasis skaičius, tada ir tik tada, kai $\frac{4}{n-1}$ yra sveikasis skaičius. Kadangi 4 dalikliai yra $\pm1, \pm2$ ir ±4, tai $n = 0, 2, -1, 3, -3, 5$. ◀

10 uždavinys. Jonas Rietaviškis sapnavo kaip važiuoja dviračiu Žemaičių plentu, o bevažiuodamas skaičiuoja medžiuose tupinčias varnas. Ir sapnuojasi jam, kad paėmus bet kuriuos penkis iš eilės augančius medžius, ten kartu sudėjus tupi ne mažiau kaip 50 varnų, tačiau paėmus pirmus vienuolika medžių, juose tupinčių varnų skaičius bus mažesnis už 110. Pabudęs Jonas Rietaviškis susimąstė, pamąstykite ir jūs: ar taip galėjo būti iš tiesų, ar tik prisisapnuoti.

Sprendimas. Taip, iš tiesų taip gali būti. Pavyzdžiui, varnų išsidėstymą pirmuose 11 medžių galėtų atitikti tokia skaičių seka: $3, 12, 12, 12, 12, 3, 12, 12, 12, 12, 3$. Jos bet kurių gretimų penkių narių suma lygi $4 \cdot 12 + 3 = 51$, o visų narių suma bus $8 \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 105$. ◀