



Rietavo XIV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas
2015–11–13
9–10 klasės

1 uždavinys. Ant medžio auga 10 kg obuolių. Kiekvieną popietę atskrenda paukščiai ir sulesa x kilogramų obuolių. Obelis per naktį priaugina 10% obuolių svorio. Su kuria didžiausia x reikšme paukščiai gali maitintis be galo?

2 uždavinys. Duota, kad parabolės $y = bx^2 - 2$ ir ašių Ox ir Oy sankirtos taškai sudaro lygiakraštį trikampį. Raskite b .

3 uždavinys. Duota, kad $f(x) + 2f(8 - x) = x^2$ su visais realiaisiais skaičiais x . Raskite $f(2)$.

4 uždavinys. Ūkininkas Jonas Rietaviškis turi 215 karvių. Kai kurios karvės „nesutaria“ tarpusavyje. Ūkininkas žino, kad kiekviena karvė nesutaria daugiausiai su 31 karve, todėl Jonas Rietaviškis nori bandą paskirstyti į aptvarus taip, kad kiekviena karvė nesutartų daugiausiai su 3 karvėmis savo aptvare. Kiek mažiausiai aptvarų reikia surežti Jonui, kad visada galėtų paskirstyti karves taip kaip jis nori?

5 uždavinys. Petras Plungiškis mėgsta keliauti, bet nori kaskart vykti vis kitu keliu. Jis išsiaiškino, kad Rietavas, Plungė ir Kuliai tarpusavyje yra sujungti keliais ir iš vieno miesto į kitą veda ne po vieną kelią. Be to, pavyzdžiui, iš Plungės į Rietavą jis gali vykti tiesiai, arba pirma nuvažiuoti iki Kulių, o tada jau važiuoti į Rietavą. Petras Plungiškis suskaičiavo, kad iš Rietavo į Plungę galima nuvažiuoti 33 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Kulius), o iš Plungės į Kulius – 23 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Rietavą). Keliais būdais jis gali nuvykti iš Rietavo į Kulius (įskaitant keliones per Plungę)?

6 uždavinys. Trikampio, kurio dviejų kraštinių ilgiai yra 2 ir 3, plotas yra lygus 3. Koks trečios kraštinės ilgis?

7 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AC ilgis yra lygus 7. Kraštinėje AB pažymėtas toks taškas D , kad $AD = BD = CD = 5$. Raskite kraštinės BC ilgį.

8 uždavinys. Iš eilės ratu surašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 2015. Pradedant nuo 1, kas penkioliktas skaičius yra pažymimas (1, 16, 31, ...). Taip tęsiama be galo. Ar gali taip atsitikti, kad visi skaičiai bus pažymėti?

9 uždavinys. Apskaičiuokite sandaugos

$$1999 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{1999}$$

skaitmenų sumą.

10 uždavinys. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius didesnis už 3. Koks didžiausias natūralusis skaičius dalija $p^2 - 1$ su visais $p > 3$?



Rietavo XIV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas
2015–11–13
11–12 klasės

1 uždavinys. Tarkime a , b ir c yra tokie fiksuoti realieji skaičiai, kad su visais realiaisiais skaičiais x , $a < x < b$ teisinga lygybė

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = c.$$

Raskite c bei mažiausią a ir didžiausią b reikšmes.

2 uždavinys. Duota, kad $f(x) + 2f(8-x) = x^2$ su visais realiaisiais skaičiais x . Raskite $f(2)$.

3 uždavinys. Petras Plungiškis mėgsta keliauti, bet nori kaskart vykti vis kitu keliu. Jis išsiaiškino, kad Rietavas, Plungė ir Kuliai tarpusavyje yra sujungti keliais ir iš vieno miesto į kitą veda ne po vieną kelią. Be to, pavyzdžiui, iš Plungės į Rietavą jis gali vykti tiesiai, arba pirma nuvažiuoti iki Kulių, o tada jau važiuoti į Rietavą. Petras Plungiškis suskaičiavo, kad iš Rietavo į Plungę galima nuvažiuoti 33 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Kulius), o iš Plungės į Kulius – 23 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Rietavą). Keliais būdais jis gali nuvykti iš Rietavo į Kulius (įskaitant keliones per Plungę)?

4 uždavinys. Pastate yra septyni liftai ir kiekvienas liftas sustoja ne daugiau kaip trijuose aukštuose. Iš bet kurio aukšto į bet kurį kitą galima nuvykti vienu liftu. Kiek daugiausiai aukštų gali būti pastate?

5 uždavinys. Ūkininkas Jonas Rietaviškis turi 215 karvių. Kai kurios karvės „nesutaria“ tarpusavyje. Ūkininkas žino, kad kiekviena karvė nesutaria daugiausiai su 31 karve, todėl Jonas Rietaviškis nori bandą paskirstyti į aptvarus taip, kad kiekviena karvė nesutartų daugiausiai su 3 karvėmis savo aptvare. Kiek mažiausiai aptvarų reikia suręsti Jonui, kad visada galėtų paskirstyti karves taip kaip jis nori?

6 uždavinys. Trikampyje ABC , kurio kraštinių ilgių yra 3, 4 ir 5, raskite tokį tašką M , kad atkarpų AM , BM ir CM ilgių kvadratų suma $AM^2 + BM^2 + CM^2$ būtų mažiausia.

7 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus 4. Jo kraštinėje AB pažymėti tokie taškai P ir Q , kad $AP = QB = \frac{1}{2}$. Taškas E priklauso bet kuriai kitai kvadrato kraštinei, o kampas PEQ yra didžiausias galimas. Raskite trikampio PEQ plotą.

8 uždavinys. Ar galima skaičius 1, 2, 3, ..., 1409, 1410 suskirstyti į 235 grupes po 6 skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje bent vienas skaičius būtų lygus kitų tos grupės skaičių aritmetiniam vidurkiui? Atsakymą pagrįskite.

9 uždavinys. Kiekvienas lyginis natūralusis skaičius, išskyrus 2, 4 ir 6, yra dviejų lyginių sudėtinių skaičių suma: $n = 4 + (n - 4)$. Koks didžiausias lyginis skaičius nėra dviejų nelyginių sudėtinių skaičių suma?

10 uždavinys. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius didesnis už 3. Koks didžiausias natūralusis skaičius dalija $p^2 - 1$ su visais $p > 3$?