Rietavo XIV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2015–11–13

9–10 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Ant medžio auga 10 kg obuolių. Kiekvieną popietę atskrenda paukščiai ir sulesa x kilogramų obuolių. Obelis per naktį priaugina 10% obuolių svorio. Su kuria didžiausia x reikšme paukščiai gali maitintis be galo?

Sprendimas. Jei obuolių po antros nakties liks mažiau, negu po pirmos nakties, tai po kurio laiko ant obels nebeliks nė vieno obuolio ir paukščiai nebeturės ką lesti. Vadinsi, paukščiai daugiausiai gali sulesti tiek, kad per naktį ataugtų pradinis svoris. Sudarome lygtį

$$(10-x)\cdot\frac{110}{100}=10.$$

Išsprendę gauname, kad $x=\frac{10}{11}$. Taigi paukščiai kasdien gali sulesti daugiausiai $\frac{10}{11}$ kg. ◀

2 uždavinys. Duota, kad parabolės $y=bx^2-2$ ir ašių Ox ir Oy sankirtos taškai sudaro lygiakraštį trikampį. Raskite b.

Sprendimas. Pastebėkime, kad parabolės ir Oy susikirtimo taškas $A(0,-2)$ yra žemiau Ox ašies, dėl to parabolė turi būti šakomis į viršų, t. y. $b>0$. Parabolė ir Ox susikerta taškuose $B(-\sqrt{\frac{2}{b}},0)$ ir $C(\sqrt{\frac{2}{b}},0)$. Atstumai tarp taškų A, B ir C turi būti lygūs, todėl $|AB|=\sqrt{\frac{2}{b}+4}=2\sqrt{\frac{2}{b}}=|BC|$. Išsprendę lygtį randame, kad $b=\frac{3}{2}$. ◀

3 uždavinys. Duota, kad $f(x)+2f(8-x)=x^2$ su visais realiaisiais skaičiais x. Raskite $f(2)$.

Sprendimas. Vietoj x įstatę 2, po to 6, galime sudaryti lygčių sistemą

$$\begin{cases} f(2)+2f(6)=4, \\ f(6)+2f(2)=36. \end{cases}$$

Išsprendę randame, kad $f(2)=\frac{68}{3}$. ◀

4 uždavinys. Ūkininkas Jonas Rietaviškis turi 215 karvių. Kai kurios karvės „nesutaria" tarpusavyje. Ūkininkas žino, kad kiekviena karvė nesutaria daugiausiai su 31 karve, todėl Jonas Rietaviškis nori bandą paskirstyti į aptvarus taip, kad kiekviena karvė nesutartų daugiausiai su 3 karvėmis savo aptvare. Kiek mažiausiai aptvarų reikia suręsti Jonui, kad visada galėtų paskirstyti karves taip kaip jis nori?

Sprendimas. Nesutariančias karves pavadinkime priešininkėmis. Jei atsitiktų taip, kad tarp 215 karvių atsirastų 32 karvės, kurios visos būtų viena kitai priešininkės, tai kiekviename aptvare galėtų būti tik po keturias tokias karves. Taigi reiktų mažiausiai $32/4=8$ aptvarų.

Tarkime aptvarų yra 8 ir Jonas veda karves vieną po kitos. Kiekvieną karvę veda į tą aptvarą, kuriame yra mažiausiai jos priešininkių. Bent viename iš aptvarų yra mažiau negu 4 priešininkės, nes kitu atveju karvė turėtų nemažiau negu $8\cdot 4=32$ priešininkes, o taip būti negali. Taigi Jonui Rietaviškiui reiktų paruošti 8 aptvarus. ◀

5 uždavinys. Petras Plungiškis mėgsta keliauti, bet nori kaskart vykti vis kitu keliu. Jis išsiaiškino, kad Rietavas, Plungė ir Kuliai tarpusavyje yra sujungti keliais ir iš vieno miesto į kitą veda ne po vieną kelią. Be to, pavyzdžiui, iš Plungės į Rietavą jis gali vykti tiesiai, arba pirma nuvažiuoti iki Kulių, o tada jau važiuoti į Rietavą. Petras Plungiškis suskaičiavo, kad iš Rietavo į Plungę galima nuvažiuoti 33 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Kulius), o iš Plungės į Kulius – 23 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Rietavą). Keliais būdais jis gali nuvykti iš Rietavo į Kulius (įskaitant keliones per Plungę)?

Sprendimas. Tiesioginių kelių skaičių iš Rietavo į Plungę pažymėkime raide x, iš Plungės į Kulius – raide y, o iš Rietavo į Kulius – raide z. Tuomet iš Rietavo į Plungę Petras Plungiškis gali nuvykti $x + yz$ būdų, iš Plungės į Kulius – $y + xz$ būdų, o iš Rietavo į Kulius – $z + xy$ būdų. Galima sudaryti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + yz = 33, \\ y + xz = 23. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties atėmę antrą lygtį gauname, kad $(x - y) - (x - y)z = 10$. Pertvarkę reiškinį turėsime lygtį $(y - x)(z - 1) = 10$. Galimi keturi atvejai:

- $z - 1 = 1$, $y - x = 10$. Tada $z = 2$, $y = 10 + x$. Įrašę į antrą sistemos lygtį, gauname, kad $x = \frac{13}{3}$, taigi šiuo atveju natūraliųjų sprendinių nėra.
- $z - 1 = 2$, $y - x = 5$. Tada $z = 3$, $y = 5 + x$. Iš lygčių sistemos randame, kad $x = \frac{9}{2}$. Ir šis atvejis mums netinka.
- $z - 1 = 5$, $y - x = 2$. Tada $z = 6$, $y = 2 + x$. Tokiu atveju $x = 3$, $y = 5$. Iš Rietavo į Kulius galima nukeliauti $6 + 3 \cdot 5 = 21$ būdais.
- $z - 1 = 10$, $y - x = 1$. Bet tada $z = 11$, $y = x + 1$, ir lygčių sistema natūraliųjų sprendinių vėl neturi. ◀

6 uždavinys. Trikampio, kurio dviejų kraštinių ilgiai yra 2 ir 3, plotas yra lygus 3. Koks trečios kraštinės ilgis?

Sprendimas. Tarkime trikampio ABC kraštinės AB ilgis yra lygus 2, o kraštinės AC ilgis lygus 3. Trikampio aukštinės h, nuleistos į kraštinę AC, ilgis lygus 2, nes $\frac{3h}{2} = 3$. Kadangi aukštinės h ilgis lygus kraštinės AB ilgiui, tai AB ir h sutampa, taigi trikampis yra statusis. Trečioji kraštinė BC yra stačiojo trikampio įžambinė, todėl jos ilgis yra $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. ◀

7 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AC ilgis yra lygus 7. Kraštinėje AB pažymėtas toks taškas D, kad $AD = BD = CD = 5$. Raskite kraštinės BC ilgį.

Sprendimas. Pastebėkime, kad taškas D yra apibrėžto apie trikampį apskritimo centras, todėl $\angle C = 90°$. Pagal Pitagoro teoremą randame, kad $BC = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$. ◀

8 uždavinys. Iš eilės ratu surašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 2015. Pradedant nuo 1, kas penkioliktas skaičius yra pažymimas (1, 16, 31, ...). Taip tęsiama be galo. Ar gali taip atsitikti, kad visi skaičiai bus pažymėti?

Sprendimas. Skaičių 2015 ir 15 mažiausias bendras kartotinis yra 6045, tad kai ratą apeisime $6045/2015 = 3$ kartus, pradėję nuo 1 vėl atsidursime ant vieneto ir toliau žymėsime jau pažymėtus skaičius. Apėję 3 ratus pažymime $6045/15 = 403$ skaičius, todėl nežymėtų lieka mažiausiai $2015 - 403 = 1612$ skaičių. ◀

9 uždavinys. Apskaičiuokite sandaugos

$$1999 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{1999}$$

skaitmenų sumą.

Sprendimas. 111...1111

x 1999

———————-

999...9999

+ 999...9999

999...9999

111...1111

———————-

222111...110889

Sandauga yra skaičius, sudarytas iš 2002 skaitmenų, iš kurių 1995 yra vienetai. Apskaičiuojame jų sumą: 1995+6+16+9=2026.

◀

10 uždavinys. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius didesnis už 3. Koks didžiausias natūralusis skaičius dalija $p^2 - 1$ su visais $p > 3$?

Sprendimas. Kadangi p yra nelyginis pirminis skaičius, tai $p-1$ ir $p+1$ yra lyginiai. Dar daugiau, vienas iš jų dalijasi iš 4. Todėl $p^2 - 1$ dalijasi iš 8. Kadangi $p > 3$, tai p nesidalija iš 3, todėl arba $p - 1$ arba $p + 1$ dalijasi iš 3. Sujungę abi išvadas gauname, kad $p^2 - 1$ dalijasi iš $3 \cdot 8 = 24$. Kai $p = 5$, tai $p^2 - 1 = 24$, todėl 24 yra didžiausias natūralusis skaičius, kuris visada dalija $p^2 - 1$. ◀

Rietavo XIV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2015–11–13

11–12 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Tarkime a, b ir c yra tokie fiksuoti realieji skaičiai, kad su visais realiaisiais skaičiais x, $a < x < b$ teisinga lygybė

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = c.$$

Raskite c bei mažiausią a ir didžiausią b reikšmes.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $x \geqslant 1$. Pakėlę kairiąją lygybės pusę kvadratu gauname

$$x + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} + x - 2\sqrt{x-1} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}.$$

Jei $x > 2$, tai $2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 4x - 4$, bet šis reiškinys nelygus konstantai jokiame intervale. Jei $x \leqslant 2$, tada $2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x - 2x + 4 = 4 = c^2$. Taigi $c = 2$. Kadangi $x - 1 \geqslant 0$, tai $a = 1$, o $b = 2$. ◀

2 uždavinys. Duota, kad $f(x) + 2f(8-x) = x^2$ su visais realiaisiais skaičiais x. Raskite $f(2)$.

Sprendimas. Vietoj x įrašę 2, po to 6, galime sudaryti lygčių sistemą

$$\begin{cases} f(2) + 2f(6) = 4, \\ f(6) + 2f(2) = 36. \end{cases}$$

Išsprendę randame, kad $f(2) = \frac{68}{3}$. ◀

3 uždavinys. Petras Plungiškis mėgsta keliauti, bet nori kaskart vykti vis kitu keliu. Jis išsiaiškino, kad Rietavas, Plungė ir Kuliai tarpusavyje yra sujungti keliais ir iš vieno miesto į kitą veda ne po vieną kelią. Be to, pavyzdžiui, iš Plungės į Rietavą jis gali vykti tiesiai, arba pirma nuvažiuoti iki Kulių, o tada jau važiuoti į Rietavą. Petras Plungiškis suskaičiavo, kad iš Rietavo į Plungę galima nuvažiuoti 33 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Kulius), o iš Plungės į Kulius – 23 skirtingais būdais (įskaitant keliones per Rietavą). Keliais būdais jis gali nuvykti iš Rietavo į Kulius (įskaitant keliones per Plungę)?

Sprendimas. Tiesioginių kelių skaičių iš Rietavo į Plungę pažymėkime raide x, iš Plungės į Kulius – raide y, o iš Rietavo į Kulius – raide z. Tuomet, iš Rietavo į Plungę Petras Plungiškis gali nuvykti $x + yz$ būdų, iš Plungės į Kulius – $y + xz$ būdų, o iš Rietavo į Kulius – $z + xy$ būdų. Galima sudaryti lygčių sistemą

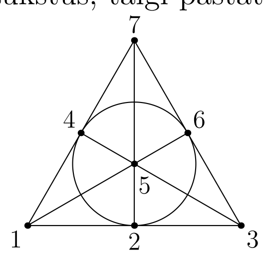
$$\begin{cases} x + yz = 33, \\ y + xz = 23. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties atėmę antrą lygtį gauname, kad $(x-y) - (x-y)z = 10$. Pertvarkę reiškinį turėsime lygtį $(y-x)(z-1) = 10$. Galimi keturi atvejai:

- $z-1=1$, $y-x=10$. Tada $z=2$, $y=10+x$. Įrašę į antrą sistemos lygtį, gauname, kad $x=\frac{13}{3}$, taigi šiuo atveju natūraliųjų sprendinių nėra.
- $z-1=2$, $y-x=5$. Tada $z=3$, $y=5+x$. Iš lygčių sistemos randame, kad $x=\frac{9}{2}$. Ir šis atvejis mums netinka.
- $z-1=5$, $y-x=2$. Tada $z=6$, $y=2+x$. Tokiu atveju $x=3$, $y=5$. Iš Rietavo į Kulius galima nukeliauti $6+3\cdot 5=21$ būdais.
- $z-1=10$, $y-x=1$. Bet tada $z=11$, $y=x+1$, ir lygčių sistema natūraliųjų sprendinių vėl neturi. ◀

4 uždavinys. Pastate yra septyni liftai ir kiekvienas liftas sustoja ne daugiau kaip trijuose aukštuose. Iš bet kurio aukšto į bet kurį kitą galima nuvykti vienu liftu. Kiek daugiausiai aukštų gali būti pastate?

Sprendimas. Jei bent viename aukšte stoja tik 1 liftas, tai iš šio aukšto galima nuvykti tik į 2 kitus aukštus. Taigi iš viso būtų 3 aukštai. Jei bent viename aukšte stoja tik 2 liftai, tai iš šio aušto galima nuvykti daugiausiai į dar $2+2=4$ aukštus. Pastate būtų daugiausiai 5 aukštai. O, jei kiekviename aukšte stoja bent po 3 liftus, tai iš kiekvieno aukšto būtų galima nuvykti į daugiausiai 6 aukštus, taigi pastate būtų daugiausiai 7 aukštai.



Kad taip paskirstyti liftus įmanoma, iliustruoja schema. Schemoje aukštai vaizduojami taškais ir yra sužymėti nuo 1 iki 7. Kiekviena iš 6 tiesių, einančių per tris taškus, atitinka liftą, keliantį į tuos aukštus. Septintą liftą vaizduoja apskritimas. Nesunku įsitikinti, kad iš kiekvieno aukšto galima nuvykti į bet kurį kitą.

Tarkime, aukštų yra daugiau negu 7. Tada kiekviename aukšte turėtų stoti bent po 4 liftus. Visi 7 liftai bendrai stoja $7\cdot 3=21$ aukšte, bet $21/4<6$, todėl aukštų negali būti daugiau negu 7. ◀

5 uždavinys. Ūkininkas Jonas Rietaviškis turi 215 karvių. Kai kurios karvės „nesutaria” tarpusavyje. Ūkininkas žino, kad kiekviena karvė nesutaria daugiausiai su 31 karve, todėl Jonas Rietaviškis nori bandą paskirstyti į aptvarus taip, kad kiekviena karvė nesutartų daugiausiai su 3 karvėmis savo aptvare. Kiek mažiausiai aptvarų reikia suręsti Jonui, kad visada galėtų paskirstyti karves taip kaip jis nori?

Sprendimas. Nesutariančias karves pavadinkime priešininkėmis. Jei atsitiktų taip, kad tarp 215 karvių atsirastų 32 karvės, kurios visos būtų viena kitai priešininkės, tai kiekviename aptvare galėtų būti tik po keturias tokias karves. Taigi reiktų mažiausiai $32/4=8$ aptvarų.

Tarkime aptvarų yra 8 ir Jonas veda karves vieną po kitos. Kiekvieną karvę veda į tą aptvarą, kuriame yra mažiausiai jos priešininkių. Bent viename iš aptvarų yra mažiau negu 4 priešininkės, nes kitu atveju karvė turėtų nemažiau negu $8\cdot 4=32$ priešininkes, o taip būti negali. Taigi Jonui Rietaviškiui reiktų paruošti 8 aptvarus. ◀

6 uždavinys. Trikampyje ABC, kurio kraštinių ilgiai yra 3, 4 ir 5, raskite tokį tašką M, kad atkarpų AM, BM ir CM ilgių kvadratų suma $AM^2+BM^2+CM^2$ būtų mažiausia.

Sprendimas. Tarkime, kad $AB = 3$, $BC = 4$, o $AC = 5$. Pažymėkime statmens, nuleisto iš taško M į kraštinę AB, ilgį raide x, o statmens nuleisto iš taško M į kraštinę BC raide y. Tuomet $BM^2 = x^2 + y^2$, $AM^2 = x^2 + (3 - y)^2$, o $CM^2 = (4 - x)^2 + y^2$. Taigi $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2x^2 + (4 - x)^2 + 2y^2 + (3 - y)^2 = 3(x - \frac{4}{3})^2 + 3(y - 1) + \frac{50}{3}$. Vadinasi, mažiausia $AM^2 + BM^2 + CM^2$ reikšmė yra $\frac{50}{3}$, kai $M = (\frac{4}{3}, 1)$. ◀

7 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus 4. Jo kraštinėje AB pažymėti tokie taškai P ir Q, kad $AP = QB = \frac{1}{2}$. Taškas E priklauso bet kuriai kitai kvadrato kraštinei, o kampas PEQ yra didžiausias galimas. Raskite trikampio PEQ plotą.

Sprendimas. Apibrėžto apie trikampį PEQ apskritimo ω centras O priklauso kraštinės AB vidurio statmeniui. Jei ω atkerta atkarpą, priklausančią kvadrato kraštinei, tuomet, atidėję tašką ant tos atkarpos, gausime didesnį kampą PEQ. Taigi didžiausią kampą PEQ gausime tada, kai apskritimas ω lies kvadrato kraštinę, todėl apskritimo spindulys lygus 1. Kadangi PQ ilgis yra lygus 1, tai trikampis POQ yra lygiakraštis ir jo aukštinės h ilgis lygus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tokio pat ilgio bus ir trikampio PEQ aukštinė nuleista į kraštinė PQ, taigi trikampio PEQ plotas lygus $\frac{\sqrt{3}}{4}$. ◀

8 uždavinys. Ar galima skaičius 1, 2, 3, ..., 1409, 1410 suskirstyti į 235 grupes po 6 skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje bent vienas skaičius būtų lygus kitų tos grupės skaičių aritmetiniam vidurkiui? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Tegu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 - bet kurios grupės skaičiai ir $a_6 = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$. Tuomet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_6$ ir $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6a_6$. Vadinasi, kiekvienos grupės skaičių suma turi dalytis iš 6. Taigi ir visų skaičių suma $1 + 2 + 3 + ... + 1410$ turi dalytis iš 6. Tačiau jų suma $\frac{1+1410}{2} \cdot 1410 = 1411 \cdot 705$ iš 6 nesidalja. Gavome prieštarą - vadinasi, skaičių suskirstyti norimu būdu negalima.

◀

9 uždavinys. Kiekvienas lyginis natūralusis skaičius, išskyrus 2, 4 ir 6, yra dviejų lyginių sudėtinių skaičių suma: $n = 4 + (n - 4)$. Koks didžiausias lyginis skaičius *nėra* dviejų nelyginių sudėtinių skaičių suma?

Sprendimas. Tarkime, kad $m = 6n + k$ yra sveikasis skaičius; čia $k = 0, 2$ arba 4. Jei $k = 0$, tai $m = 6n = 9 + 3(2n - 3)$. Antrasis dėmuo yra sudėtinis skaičius, jei $2n - 3 > 1$, t. y., kai $m > 12$. Jei $k = 2$, tai $m = 6n + 2 = 35 + 3(2n - 11)$. Ir vėl, antrasis dėmuo yra sudėtinis skaičius, jei $2n - 11 > 1$, t. y., kai $m > 38$. Trečiu atveju, kai $k = 4$, $m = 6n + 4 = 25 + 3(2n - 7)$ ir antras dėmuo yra sudėtinis skaičius, jei $2n - 7 > 1$, t. y., kai $m > 28$. Iš šių pastebėjimų gauname, kad kai $m > 38$, tai m galima užrašyti dviejų nelyginių sudėtinių skaičių suma. Nesunku įsitikinti, kad 38 taip užrašyti negalima, todėl 38 yra didžiausias toks skaičius.

◀

10 uždavinys. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius didesnis už 3. Koks didžiausias natūralusis skaičius dalija $p^2 - 1$ su visais $p > 3$?

Sprendimas. Kadangi p yra nelyginis pirminis skaičius, tai $p - 1$ ir $p + 1$ yra lyginiai. Dar daugiau, vienas iš jų dalijasi iš 4. Todėl $p^2 - 1$ dalijasi iš 8. Kadangi $p > 3$, tai p nesidalija iš 3, todėl arba $p - 1$ arba $p + 1$ dalijasi iš 3. Sujungę abi išvadas gauname, kad $p^2 - 1$ dalijasi iš $3 \cdot 8 = 24$. Kai $p = 5$, tai $p^2 - 1 = 24$, todėl 24 yra didžiausias natūralusis skaičius, kuris visada dalija $p^2 - 1$. ◀