Rietavo XV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2016–11–11

9–10 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Mykolas sugalvoja skaičių, tada padalija jį iš dvejetu didesnio skaičiaus ir rezultatą atima iš vieneto. Šį skirtumą padalija iš skaičiaus, vienetu mažesnio už pradinį sugalvotą skaičių, ir gauna $\frac{1}{27}$. Kokį skaičių galėjo sugalvoti Mykolas?

Sprendimas. Pažymėkime šį skaičių x. Sudarome lygtį:

$$\frac{1-\frac{x}{x+2}}{x-1}=\frac{1}{27}\,.$$

Pertvarkę ją gauname kvadratinę lygtį $x^2+x-56=0$ ir ją išsprendę gauname $x=7$ arba $x=-8$. Vadinasi, Mykolas sugalvojo vieną iš šių skaičių: 7 arba -8. ◀

2 uždavinys. Du žmonės stovi toje pačioje vietoje prie geležinkelio. Kai juos pasiekia pravažiuojančio traukinio priekis, jie pradeda eiti priešingomis kryptimis lygiagrečiai geležinkeliui. Kai kiekvieną iš jų pasiekia traukinio galas, jie sustoja nuėję atitinkamai 30 m ir 40 m. Koks yra traukinio, važiuojančio pastoviu greičiu, ilgis, jei abu žmonės ėjo vienodu pastoviu greičiu?

Sprendimas. Pažymėkime traukinio greitį u, žmogaus greitį v, o traukinio ilgį – s. Tuomet žmogus, ėjęs priešinga traukinio važiavimo kryptimi, ėjo $\frac{s}{u+v}$ laiko ir per tą laiką nuėjo $\frac{s}{u+v}\cdot v=30$ metrų. Žmogus, ėjęs traukinio važiavimo kryptimi, nuėjo $\frac{s}{u-v}\cdot v=40$ metrų. Iš pirmosios lygties išreiškiame u ir gautą išraišką įrašome į antrą lygtį: $u=\frac{sv-30v}{30}$ ir $\frac{30sv}{sv-60v}=40$. Iš čia gauname, kad $s=240$ metrų. ◀

3 uždavinys. Funkcija f tenkina lygtį $f(x)+1=\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$ su visais realiaisiais skaičiais x. Jei $f(-1)=f(1)=5$, kokia yra $f(3)$ reikšmė?

Sprendimas. Vietoj x įrašome 0:

$$f(0)+1=\frac{f(-1)+f(1)}{2}=\frac{5+5}{2}=5 \implies f(0)=4.$$

Toliau vietoj x įrašome vis vienetu didesnes reikšmes ir išsprendžiame lygtis:

$$f(1)+1=6=\frac{f(0)+f(2)}{2}=\frac{4+f(2)}{2} \implies f(2)=12-4=8$$
$$f(2)+1=9=\frac{f(1)+f(3)}{2}=\frac{5+f(3)}{2} \implies f(3)=18-5=13$$

Taigi atsakymas yra $f(3)=13$. ◀

4 uždavinys. Trikampio ABC kampas B yra statusis. Taškai M ir N yra atitinkamai kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Jei $AN=24$, o $MC=17$, koks yra AC ilgis?

Sprendimas. Pažymėkime kraštinių BC, AC, AB ilgius raidėmis a, b, c. Pasinaudoję Pitagoro teorema trikampiams ABC, MBC ir ABN sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 \\ \frac{c^2}{4} + a^2 = 289 \\ \frac{a^2}{4} + c^2 = 576 \end{cases}$$

Sudėję antrą ir trečią lygtis gauname, kad $\frac{5}{4} \cdot (a^2 + c^2) = 289 + 576 = 865$, ir tada $b^2 = a^2 + c^2 = \frac{4}{5} \cdot 865 = 692$, o $b = \sqrt{692} = 2\sqrt{173}$. ◀

5 uždavinys. Raskite stačiakampio, kurio įstrižainė lygi 24 cm, o kampas tarp įstrižainių lygus 60°, plotą.

Sprendimas. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime raide E. Tarkime AB yra trumpesnioji stačiakampio kraštinė, tada $\angle ABE = \angle BAE = 60°$. Taigi trikampis ABE yra lygiakraštis. Kadangi $BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}24 = 12$, tai ir $AB = 12$.

Pažymėkime raide H kraštinės AD vidurio tašką. Trikampis AEH yra statusis, $\angle EAH = 30°$, taigi $EH = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$. Tuomet $AH = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$. Taigi $AD = 12\sqrt{3}$, o stačiakampio $ABCD$ plotas lygus $12\sqrt{3} \cdot 12 = 144\sqrt{3}$. ◀

6 uždavinys. Trikampyje ABC nubrėžta pusiaukraštinė AD. Raskite kampo $\angle ABC$ didumą, jei žinome, kad $\angle BAC$ yra statusis, o $\angle CDA = 30°$.

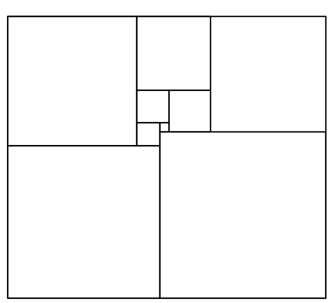
Sprendimas. Pusiaukraštinė $AD = \frac{1}{2}BC = BD = DC$, vadinasi, trikampis $\angle CDA$ yra lygiašonis ir $\angle DCA = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle CDA) = 75°$, o kampas $\angle ABC = 90° - \angle BCA = 15°$. ◀

7 uždavinys. Rusnė žaidžia su skaičiuotuvu. Ji skaičiuoja, iš kelių pagaliukų sudaryti jos parašyti skaičiai. Pavyzdžiui, paveikslėlyje parašytas skaičius turi lygiai 49 pagaliukus. Vėliau ji parašo didžiausią skaičių, kurį galima sudaryti iš 13 pagaliukų. Koks tai skaičius?

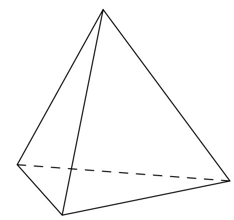
Sprendimas. Didžiausias skaičius turės didžiausią galimą skaitmenų skaičių. Vienam skaitmeniui parašyti reikia bent 2 pagaliukų (skaitmuo 1 sudarytas iš dviejų pagaliukų), taigi skaičius iš 13 pagaliukų gali turėti daugiausia 6 skaitmenis. Tokiu atveju 5 skaitmenys bus sudaryti iš dviejų pagaliukų (t. y. skaitmuo 1), o vienas skaitmuo bus sudarytas iš trijų pagaliukų (t. y. skaitmuo 7). Didžiausias skaičius, kurį galima sudėlioti iš šių skaitmenų, yra 711111. ◀

8 uždavinys. Ar yra toks stačiakampis, kurį galima sukarpyti į devynis kvadratus su kraštinių ilgiais $2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33$ ir 36?

Sprendimas. Galima karpyti taip:



Pastaba. Visų kvadratinių detalių plotų suma yra $4209 = 3 \cdot 23 \cdot 61$. Kadangi nei 3, nei 23 negali būti stačiakampio kraštinės ilgis (tada būtų detalių, kurios „netilptų“ į dėlionę), vadinasi visos dėlionės kraštinių ilgiai yra 61 ir 69. ◀



9 uždavinys. Kiekvieną taisyklingos trikampės piramidės (žr. pav.) sieną galima nudažyti raudonai arba mėlynai. Kiek yra skirtingų būdų nudažyti piramidę? (Du būdai laikomi vienodais, jei vienu būdu nudažyta piramidė gali būti pasukta taip, kad jos kiekvienos sienos spalva sutaptų su kitu būdu nudažytos piramidės atitinkamos sienos spalva.)

Sprendimas. Visus galimus būdus nudažyti piramidę galime suskirstyti į tris grupes:

1. Vienspalviai: visos 4 piramidės sienos nuspalvintos ta pačia spalva: raudona arba mėlyna.

2. Dvispalviai: 3 piramidės sienos nuspalvintos viena spalva, 4-oji – kita spalva.

3. Dvispalviai: 2 sienos nuspalvintos viena, 2 – kita spalva.

Yra 2 būdai nuspalvinti piramidę vienspalviai: raudonai arba mėlynai. Antrosios grupės nuspalvinimų yra $2 \cdot 1 = 2$: nesunku įsitikinti, kad jei tris piramidės sienas nudažysime, pavyzdžiui, mėlynai,o ketvirtąją – raudonai, tai įvairiai sukiodami šitaip nudažytą piramidę gausime visus galimus tokio nudažymo variantus.

Imkimės trečiosios grupės: pastebėkime, kad ir kaip išsirinktume dvi tetraedro sienas, kurias dažysime ta pačia spalva, šios sienos turės lygiai vieną bendrą briauną, todėl yra tik vienas būdas nuspalvinti dvi tetraedro sienas ta pačia spalva, nes likusios dvi sienos, kurias dažysime kita spalva, taip pat tarpusavyje liesis briauna, o sukiojant gausime visus įmanomus variantus. Vadinasi, tėra 1 šios grupės būdas (skirtingai, nei antrojoje grupėje, nesvarbu, kuria spalva pasirinksime dažyti pirma).

Sudėję visų trijų grupių nudažymo būdus gauname $2 + 2 + 1 = 5$. ◀

10 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Kostas Gargždiškis žaidžia tokį žaidimą. Krūvelėje guli 32 akmenukai. Abu žaidėjai iš krūvelės pakaitomis ima arba vieną akmenuką, arba pirminį skaičių akmenukų tol, kol nebelieka nei vieno akmenuko. Laimi tas žaidėjas, kuris paima paskutinį akmenuką. Kostas Gargždiškis pradeda žaidimą. Įrodykite, kad Jonas Rietaviškis visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų Kostas Gargždiškis.

Sprendimas. Pradėkime spręsti uždavinį „nuo galo“. Jeigu kuris nors žaidėjas sulaukia savo ėjimo, kada krūvelėje guli tik vienas akmenukas, jis paims tą paskutinį akmenuką ir vienu ėjimu laimės žaidimą. Taip pat jis vienu ėjimu gali laimėti, jei krūvelėje yra likę 2 arba 3 akmenukai, Taigi, 1, 2 ir 3 akmenukai yra laiminčios pozicijos.

Bet jeigu krūvelėje guli 4 akmenukai, tai ėjimą darantis žaidėjas gali paimti 1,2 arba 3 akmenukus ir jo priešininkas kitu ėjimu laimės žaidimą. Vadinasi, 4 akmenukai yra pralaiminti pozicija.

Tęsiant toliau, jeigu krūvelėje guli 5,6 arba 7 akmenukai, žaidėjas gali paimti 1,2 arba 3 akmenukus taip, kad krūvelėje liktų 4 akmenukai ir taip įstumtų savo priešininką į pralaiminčią poziciją, o jeigu krūvelėje bus 8 akmenukai, žaidėjas negalės nei paimti visų akmenukų, nei paimti 4 akmenukų ir palikti savo priešininkui pralaiminčios pozicijos, todėl kad ir kiek akmenukų jis paimtų, jo priešininkas gaus laiminčią poziciją.

Matome, kad pralaimės tas žaidėjas, kurio ėjimo metu krūvelėje bus akmenukų skaičius, besidalijantis iš 4: kadangi jis pats negalės paimti iš krūvelės 4-ių kartotinio, jis privalės palikti savo priešininkui tokį skaičių akmenukų, kuris nesidalija iš 4, o tuomet jo priešininkas visada galės paimti 1,2 arba 3 akmenukus taip, kad krūvelėje liktų iš 4 besidalijantis akmenukų skaičius. Tokia situacija kartosis tol, kol nebeliks nei vieno akmenuko. Kadangi žaidimą pradeda Kostas Gargždiškis su 32 akmenukais, tai žaidimą laimės jo priešininkas Jonas Rietaviškis.

◀

Rietavo XV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2016 11 11

11–12 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Raskite lygties

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$$

realiųjų sprendinių sandaugą.

Sprendimas. Perrašykime lygtį:

$$x^2 + 18x + 45 - 2\sqrt{x^2 + 18x + 45} + 1 - 16 = 0$$
$$(\sqrt{x^2 + 18x + 45} - 1 - 4)(\sqrt{x^2 + 18x + 45} - 1 + 4) = 0\,.$$

Antrasis daugiklis realių sprendinių neturi. Randame, kada pirmasis daugiklis lygus 0:

$$\sqrt{x^2 + 18x + 45} = 5\,, \quad x^2 + 18x + 20 = 0\,, \quad x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{61}}{2}\,.$$

Kita vertus, sąlyga mūsų prašo ne pačių sprendinių, o tik jų sandaugos. Kadangi sprendinius mums „duoda“ tik pirmasis daugiklis, tai pagal Vijeto teoremą ši sandauga bus lygi 20. ◀

2 uždavinys. Du žmonės stovi toje pačioje vietoje prie geležinkelio. Kai juos pasiekia pravažiuojančio traukinio priekis, jie pradeda eiti priešingomis kryptimis lygiagrečiai geležinkeliui. Kai kiekvieną iš jų pasiekia traukinio galas, jie sustoja nuėję atitinkamai 30 m ir 40 m. Koks yra traukinio, važiuojančio pastoviu greičiu, ilgis, jei abu žmonės ėjo vienodu pastoviu greičiu?

Sprendimas. Pažymėkime traukinio greitį u, žmogaus greitį v, o traukinio ilgį – s. Tuomet žmogus, ėjęs priešinga traukinio važiavimo kryptimi, ėjo $\frac{s}{u+v}$ laiko ir per tą laiką nuėjo $\frac{s}{u+v} \cdot v = 30$ metrų. Žmogus, ėjęs traukinio važiavimo kryptimi, nuėjo $\frac{s}{u-v} \cdot v = 40$ metrų. Iš pirmosios lygties išreiškiame u ir gautą išraišką įrašome į antrą lygtį: $u = \frac{sv-30v}{30}$ ir $\frac{30sv}{sv-60v} = 40$. Iš čia gauname, kad $s = 240$ metrų. ◀

3 uždavinys. Funkcija f tenkina lygtį $f(x) + 1 = \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$ su visais realiaisiais skaičiais x. Jei $f(-1) = f(1) = 5$, kokia yra $f(3)$ reikšmė?

Sprendimas. Vietoj x įrašome 0:

$$f(0) + 1 = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{5+5}{2} = 5 \implies f(0) = 4.$$

Toliau vietoj x įrašome vis vienetu didesnes reikšmes ir išsprendžiame lygtis:

$$f(1)+1=6=\frac{f(0)+f(2)}{2}=\frac{4+f(2)}{2} \implies f(2)=12-4=8$$
$$f(2)+1=9=\frac{f(1)+f(3)}{2}=\frac{5+f(3)}{2} \implies f(3)=18-5=13$$

Taigi, atsakymas yra $f(3)=13$. ◀

4 uždavinys. Du realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę: $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1$. Raskite visas galimas $x+y$ reikšmes.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $(\sqrt{1+y^2}+y)(\sqrt{1+y^2}-y)=y^2+1-y^2=1$, todėl uždavinio sąlygą galime perrašyti taip:

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=(\sqrt{1+y^2}+y)(\sqrt{1+y^2}-y).$$

Kadangi $y+\sqrt{1+y^2}\neq 0$ (antraip negaliotų uždavinio sąlyga), abi puses padalijame iš $y+\sqrt{1+y^2}$ ir atliekame kitus veiksmus:

$$\begin{aligned}
x+\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+y^2}-y\\
x+y &= \sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}\\
x^2+2xy+y^2 &= 1+y^2-2\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}+1+x^2\\
1-xy &= \sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}\\
1-2xy+x^2y^2 &= 1+y^2+x^2+x^2y^2\\
x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2=0.
\end{aligned}$$

Vadinasi, $x+y$ tegali būti lygi 0. Belieka patikrinti, ar tikrai kai $x+y=0$ teisinga uždavinio sąlyga. Įrašykime $y=-x$:

$$(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=1+x^2-x^2=1.$$

Matome, kad uždavinio sąlyga teisinga su visais $x+y=0$. ◀

5 uždavinys. Tegu ABC – įvairiakraštis trikampis (trikampis, kurio visos kraštinės yra skirtingo ilgio), o AC – ilgiausia jo kraštinė. Kraštinėje AC pažymėti tokie taškai P ir Q, kad $AP=AB$ ir $CQ=CB$. Apskritimo, apibrėžto apie trikampį BPQ, centrą pažymėkime O_1, o apskritimo, įbrėžto į trikampį ABC, centrą pažymėkime O_2. Įrodykite, kad šių apskritimų centrai O_1 ir O_2 sutampa.

Sprendimas. Kadangi $AP=AB$, tai $\triangle ABP$ yra lygiašonis. Vadinasi, $\triangle ABP$ pusiaukampinė, nubrėžta iš taško A, sutampa su BP vidurio statmeniu. Analogiškai, $\triangle BCQ$ pusiaukampinė iš taško C sutampa su QB vidurio statmeniu. Vadinasi, jų sankirtos taškas O bus, viena vertus, $\triangle ABC$ įbrėžtinio apskritimo centras, kita vertus, $\triangle BPQ$ apibrėžtinio apskritimo centras. Taigi O_1 ir O_2 sutampa. ◀

6 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinės AB vidurio taškas pažymėtas raide M. Ant statinio BC (arba jo tęsinio) pažymėtas taškas D, toks, kad $AC=MD$. Raskite kampo $\angle CDM$ didumą.

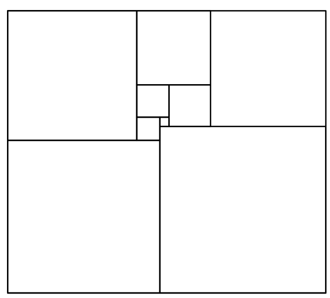
Sprendimas. Kraštinės BC vidurio tašką pažymėkime N. Tuomet MN yra $\triangle ABC$ vidurinė linija ir $AC = MD = 2MN$. Kadangi $BC \perp MN$, tai $\triangle MND$ yra statusis, kurio statinis MN yra du kartus trumpesnis už įžambinę MD, vadinasi, kampas prieš šį statinį $\angle MDN = 30°$. ◀

7 uždavinys. Sofija ant trijų kortelių užrašė 6 skirtingus skaičius (po vieną ant kiekvienos kortelės pusės) taip, kad ant kiekvienos kortelės parašytų skaičių suma būtų ta pati. Tada ji padėjo korteles ant stalo su atverstais skaičiais 44, 59 ir 38. Visi trys skaičiai, kurių nesimato, yra pirminiai skaičiai. Kokie tai skaičiai?

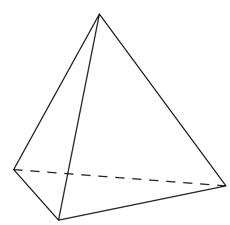
Sprendimas. Du iš matomų skaičių yra lyginiai (44 ir 38), o vienas – nelyginis (59). Kadangi kortelėse parašytų skaičių sumos vienodos, tai ir paslėptų skaičių lyginumai skirsis. Tačiau yra tik vienas lyginis pirminis skaičius – 2, vadinasi, ant kortelės parašytų skaičių suma lygi $59 + 2 = 61$, o likę du nematomi skaičiai yra $61 - 44 = 17$ ir $61 - 38 = 23$. Taigi, nematomi skaičiai yra 2, 17 ir 23. ◀

8 uždavinys. Ar yra toks stačiakampis, kurį galima sukarpyti į devynis kvadratus su kraštinių ilgiais $2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33$ ir 36?

Sprendimas. Galima karpyti taip:



Pastaba. Visų kvadratinių detalių plotų suma yra $4209 = 3 \cdot 23 \cdot 61$. Kadangi nei 3, nei 23 negali būti stačiakampio kraštinės ilgis (tada būtų detalių, kurios „netilptų“ į dėlionę), vadinasi visos dėlionės kraštinių ilgiai yra 61 ir 69. ◀



9 uždavinys. Kiekvieną taisyklingos trikampės piramidės (žr. pav.) sieną galima nudažyti raudonai, baltai arba mėlynai. Kiek yra skirtingų būdų nudažyti piramidę? (Du būdai laikomi vienodais, jei vienu būdu nudažyta piramidė gali būti pasukta taip, kad jos kiekvienos sienos spalva sutaptų su kitu būdu nudažytos piramidės atitinkamos sienos spalva.)

Sprendimas. Visus galimus būdus nudažyti piramidę galime suskirstyti į keturias grupes:

1. Vienspalviai: visos 4 piramidės sienos nuspalvintos ta pačia spalva: raudona, balta arba mėlyna.

2. Dvispalviai: 3 piramidės sienos nuspalvintos viena spalva, 4-oji – kita spalva.

3. Dvispalviai: 2 sienos nuspalvintos viena, 2 – kita spalva.

4. Trispalviai: tuomet dvi sienos bus nuspalvintos viena spalva, o kitos dvi - likusiomis dviemis spalvomis.

Yra 3 būdai nuspalvinti piramidę vienspalviai: raudonai, baltai arba mėlynai. Antrosios grupės nuspalvinimų yra $3 \cdot 2 = 6$: nesunku įsitikinti, kad jei tris piramidės sienas nudažysime, pavyzdžiui, mėlynai,o ketvirtąją – baltai, tai įvairiai sukiodami šitaip nudažytą piramidę gausime visus galimus tokio nudažymo variantus.

Imkimės trečiosios grupės: pastebėkime, kad ir kaip išsirinktume dvi tetraedro sienas, kurias dažysime ta pačia spalva, šios sienos turės lygiai vieną bendrą briauną, o tuomet likusios dvi sienos, kurias dažysime kita spalva, taip pat tarpusavyje liesis briauna. Vadinasi, visi šios grupės nudažymai, turintys, pavyzdžiui dvi mėlynas ir dvi baltas sienas, bus tarpusavy vienodi, taigi iš viso tokių būdų bus $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (skirtingai nei antrojoje grupėje, čia dviejų spalvų parinkimo tvarka nėra svarbi).

Lieka ketvirtoji grupė. Jau žinome, kad yra tik vienas būdas nuspalvinti dvi tetraedro sienas ta pačia spalva, bet ar yra svarbu, kokia tvarka kitomis dviem spalvomis dažysime likusias dvi tetraedro sienas (pavadinsime jas skirtingaspalvėmis)? Užtenka įrodyti, kad yra toks tetraedro pasukimas, kuris šias skirtingaspalves sienas sukeičia tarpusavyje. Išties, jei apversime tetraedrą taip, kad briauna, per kurią liečiasi vienspalvės sienos, liktų toje pačioje vietoje, gausime naują nudažymą, kuris nuo pirmojo skirsis tik skirtingaspalvių sienų išdėstymo tvarka. Kadangi yra 3 būdai parinkti spalvą, kuria dažysime dvi sienas, o likusioms dviems sienoms prireiks abiejų likusių spalvų, iš viso yra 3 skirtingi ketvirtosios grupės nudažymo būdai.

Sudėję visų keturių grupių nudažymo būdus gauname $3 + 6 + 3 + 3 = 15$. ◀

10 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Kostas Gargždiškis žaidžia tokį žaidimą. Krūvelėje guli 32 akmenukai. Abu žaidėjai iš krūvelės pakaitomis ima arba vieną akmenuką, arba pirminį skaičių akmenukų tol, kol nebelieka nei vieno akmenuko. Laimi tas žaidėjas, kuris paima paskutinį akmenuką. Kostas Gargždiškis pradeda žaidimą. Įrodykite, kad Jonas Rietaviškis visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų Kostas Gargždiškis.

Sprendimas. Pradėkime spręsti uždavinį „nuo galo“. Jeigu kuris nors žaidėjas sulaukia savo ėjimo, kada krūvelėje guli tik vienas akmenukas, jis paims tą paskutinį akmenuką ir vienu ėjimu laimės žaidimą. Taip pat jis vienu ėjimu gali laimėti, jei krūvelėje yra likę 2 arba 3 akmenukai, Taigi, 1, 2 ir 3 akmenukai yra laiminčios pozicijos.

Bet jeigu krūvelėje guli 4 akmenukai, tai ėjimą darantis žaidėjas gali paimti 1,2 arba 3 akmenukus ir jo priešininkas kitu ėjimu laimės žaidimą. Vadinasi, 4 akmenukai yra pralaiminti pozicija.

Tęsiant toliau, jeigu krūvelėje guli 5,6 arba 7 akmenukai, žaidėjas gali paimti 1,2 arba 3 akmenukus taip, kad krūvelėje liktų 4 akmenukai ir taip įstumtų savo priešininką į pralaiminčią poziciją, o jeigu krūvelėje bus 8 akmenukai, žaidėjas negalės nei paimti visų akmenukų, nei paimti 4 akmenukų ir palikti savo priešininkui pralaiminčios pozicijos, todėl kad ir kiek akmenukų jis paimtų, jo priešininkas gaus laiminčią poziciją.

Matome, kad pralaimės tas žaidėjas, kurio ėjimo metu krūvelėje bus akmenukų skaičius, besidalijantis iš 4: kadangi jis pats negalės paimti iš krūvelės 4-ių kartotinio, jis privalės palikti savo priešininkui tokį skaičių akmenukų, kuris nesidalija iš 4, o tuomet jo priešininkas visada galės paimti 1,2 arba 3 akmenukus taip, kad krūvelėje liktų iš 4 besidalijantis akmenukų skaičius. Tokia situacija kartosis tol, kol nebeliks nei vieno akmenuko. Kadangi žaidimą pradeda Kostas Gargždiškis su 32 akmenukais, tai žaidimą laimės jo priešininkas Jonas Rietaviškis. ◀