ŠIRVINTŲ KRAŠTO
ANTRASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2014 m. spalio17 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Grybautojas Petras miške rado ne daugiau kaip 130 baravykų ir raudonikių. Baravykų jis rado 3 kartus daugiau negu raudonikių. Namuose jis pastebėjo, kad 4 procentai surinktų grybų yra sukirmiję. Kiek sveikų grybų rado Petras?

Sprendimas. Tegu b yra Petro rastų baravykų, r – raudonikių, o x yra sveikų grybų skaičius.

Pagal uždavinio sąlygą $b+r\le 130,\ b=3r,\ \ x=0{,}96(b+r)$. Iš čia gauname:

$$\begin{cases} 4r\le 130, \\ x=0{,}96\cdot 4r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\le 32, \\ x=3{,}84r \end{cases} \Rightarrow r=25,\ x=96$$

(nes r ir x sveikieji skaičiai).

Ats.: 96.

2. Nuvažiavęs pusę kelio dviratininkas padidino greitį 25 procentais ir į galutinį punktą nuvažiavo 0,5 valandos anksčiau negu planavo. Kiek laiko dviratininkas užtruko kelyje?

Sprendimas. Tegu t yra planuotas kelionės laikas, v – pradinis dviratininko greitis, o S – nuvažiuotas kelias. Pagal uždavinio sąlygą

$$S=vt \text{ ir } S=v\cdot\frac{1}{2}t+(v+0{,}25v)\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right).$$

Iš čia gauname:

$$vt=\frac{vt}{2}+\frac{1{,}25vt}{2}-\frac{1{,}25v}{2},$$
$$0{,}25vt=1{,}25v,$$
$$t=5.$$

Vadinasi, kelionėje dviratininkas užtruko $5-0{,}5=4{,}5$ (h).

Ats.: 4,5 h.

3. Raskite triženklį skaičių, kurį padvigubinus gaunamas skaičius, rodantis, kiek reikia skaitmenų visiems skaičiams nuo vieneto iki ieškomojo skaičiaus (įskaitant ir jį) užrašyti.

Sprendimas. Tegu $\overline{xyz}$ yra ieškomasis triženklis skaičius. Kadangi yra 9 vienaženkliai skaičiai, $99-9=90$ dviženklių skaičių ir $\overline{xyz}-99$ triženkliai skaičiai, tai jiems užrašyti reikės

$$9\cdot 1+90\cdot 2+(\overline{xyz}-99)\cdot 3=3\cdot\overline{xyz}-108$$

skaitmenų. Pagal uždavinio sąlygą

$$3\cdot\overline{xyz}-108=2\cdot\overline{xyz},$$

todėl $\overline{xyz}=108.$

Ats.: 108.

4. Kiek yra aštuonženklių skaičių 2014****, kurie dalijasi iš skaičių 6, 7, 8 ir 9?

Sprendimas. Skaičių 6, 7, 8 ir 9 mažiausias bendras kartotinis yra $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504.$ Todėl aštuonženklis skaičius 2014**** dalysis iš skaičių 6, 7, 8 ir 9 tik tada, kai dalysis iš 504. Kadangi $20140000 = 39960 \cdot 504 + 160,$ tai mažiausias aštuonženklis skaičius $\overline{2014****},$ kuris dalijasi iš 504 yra 20140344. Belieka apskaičiuoti, keli natūralieji skaičiai m tenkina nelygybę

$$20140344 + 504m \le 20149999.$$

Gauname

$$504m \le 9655 \Rightarrow m \le 19.$$

Taigi yra 20 aštuonženklių skaičių $\overline{2014****},$ kurie dalijasi iš skaičių 6, 7, 8 ir 9.

Ats.: 20.

5. Linas ir Romas užrašinėja skaitmenimis 1, 2, 3, 4 ir 5 dvidešimtženklį skaičių. Pirmą skaitmenį rašo Linas, antrą – Romas, trečią – Linas ir t. t. Romas nori, kad užrašytas skaičius dalytųsi iš 9. Ar gali Linas sutrukdyti išsipildyti Romo svajonei?

Sprendimas. Taip. Linui pakanka iš pradžių užrašyti 1, o paskui stebėti, ką rašo Romas. Jei sudėjus Romo skaitmenį su Lino skaitmeniu bus 6, tai devyniolikaženklio skaičiaus skaitmenų suma bus $1 + 9 \cdot 6 = 55.$ Kad ir kokį skaitmenį Romas pasirinktų, parašyto dvidešimtženklio skaičiaus skaitmenų suma nesidalys iš 9.

Ats.: Taip.

6. Lentoje parašytas skaičius 23. Kiekvieną minutę skaičius nutrinamas, o jo vietoje parašomas skaičius, lygus skaičiaus skaitmenų sandaugai plius 12. Koks skaičius bus parašytas lentoje po 60 minučių?

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą gausime tokių skaičių seką:

$$23 \to 18 \to 20 \to 12 \to 14 \to 16 \to 18 \to ...$$

Matome, kad po 5 žingsnių skaičiai pradeda kartotis. Per 60 minučių susidaro 12 tokių skaičių penketų:

$$18 \to 20 \to 12 \to 14 \to 16.$$

Taigi paskutinis skaičius bus 16.

Ats.: 16.

7. Raskite sandaugą xyz, jei x, y ir z yra skirtingi skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{z}.$$

Sprendimas. Iš lygybės $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ gauname:

$$(x - y) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0,$$

$$x - y - \frac{x - y}{xy} = 0,$$

$$(x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 0.$$

Kadangi $x \ne y,$ tai $1 - \frac{1}{xy} = 0.$ Iš čia $xy = 1.$

Analogiškai iš lygybės $x+\frac{1}{x}=z+\frac{1}{z}$ gauname, kad $xz=1$, o iš lygybės $y+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{z}$ gauname, kad $yz=1$.

Vadinasi,

$$xy\cdot xz\cdot yz=(xyz)^2=1.$$

Todėl $xyz=-1$ arba $xyz=1$.

Ats.: –1 arba 1.

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+xy+x=10, \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėkime abi lygtis ir gausime:

$$x^2+2xy+y^2+x+y=30,$$
$$(x+y)^2+(x+y)-30=0.$$

Pažymėję $t=x+y$ gausime kvadratinę lygtį $t^2+t-30=0$, kurios sprendiniai yra 5 ir –6. Taigi

$$x+y=5 \quad \text{arba} \quad x+y=-6.$$

Pirmuoju atveju $y=5-x$. Įrašę į pirmą sistemos lygtį, gausime:

$$x^2+x(5-x)+x=10,$$
$$6x=10,$$
$$x=\frac{5}{3}\Rightarrow y=5-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}.$$

Antruoju atveju $y=-6-x$. Įrašę į pirmą sistemos lygtį, gausime:

$$x^2+x(-6-x)+x=10,$$
$$-5x=10,$$
$$x=-2\Rightarrow y=-6-(-2)=-4.$$

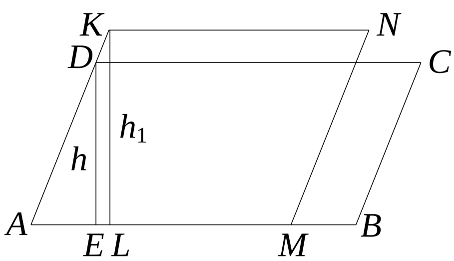
Taigi sistema turi du sprendinius: $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$ ir (–2; –4).

Ats.: $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$, (–2; –4).

9. Nustatykite, keliais procentais pasikeis lygiagretainio plotas, vieną jo kraštinę pailginus 20 %, o kitą kraštinę sutrumpinus 20 %.

Sprendimas. Tegu lygiagretainio *ABCD* kraštinių *AB* ir *AD* ilgiai yra *a* ir *b*, o aukštinės *DE* ilgis yra *h* (žr. pav.). Kraštinę *AB* sutrumpinkime 20 %, kraštinę *AD* pailginkime 20 % ir nubrėžkime lygiagretainį *AMNK*. Jo aukštinės *KL* ilgį pažymėkime h_1. Iš stačiųjų trikampių *ALK* ir *AED* panašumo gauname, kad

$$\frac{h_1}{h}=\frac{AK}{AD}=\frac{1{,}2b}{b}=1{,}2.$$



Todėl $h_1=1{,}2h$ ir

$$S_{AMNK}=0{,}8a\cdot 1{,}2h=0{,}96ah=0{,}96\,S_{ABCD}.$$

Iš čia darome išvadą, kad lygiagretainio *AMNK* plotas yra 4 % mažesnis už lygiagretainio *ABCD* plotą.

Tokį pat rezultatą gautume ir tada, kai 20 % pailgintume kraštinę *AB*, o sutrumpintume kraštinę *AD*.

Kitas sprendimo būdas. Tegul lygiagretainio kraštinių ilgiai yra a ir b, o kampas tarp jų α. Tada $S = a \cdot b \sin\alpha$.

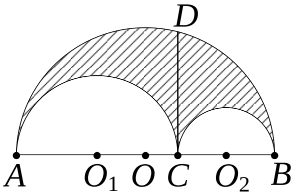
Kai kraštinę a sutrumpiname 20 %, o kraštinę b pailginame 20 %, gauto lygiagretainio plotas bus

$$S_1 = 0{,}8a \cdot 1{,}2b \cdot \sin\alpha = 0{,}96ab\sin\alpha = 0{,}96S.$$

Taigi lygiagretainio plotas sumažėjo 4 %.

Ats.: sumažės 4 procentais.

10. Atkarpa AC yra vieno apskritimo skersmuo, o atkarpa CB yra kito apskritimo skersmuo (*žr.* pav.). Juos gaubiančio apskritimo skersmuo yra AB. Statmens CD ilgis lygus a. Apskaičiuokite subrūkšniuotos srities plotą.



Sprendimas. Didžiojo apskritimo spindulį pažymėkime R, o mažųjų apskritimų (jų centrai O_1 ir O_2) atitinkamai r_1 ir r_2. Subrūkšniuotos didžiojo pusskritulio dalies plotą pažymėkime S. P[illegible]es gauname:

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 - \left(\frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - r_1^2 - r_2^2\right).$$

Kadangi

$$R = r_1 + r_2 \text{ ir } \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2} = a,$$

tai

$$R^2 = (r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$$

ir $4r_1r_2 = a^2$. Todėl

$$S = \frac{1}{2}\pi \cdot 2r_1r_2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ats.: $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

ŠIRVINTŲ KRAŠTO
ANTRASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2014 m. spalio17 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Mero rinkimuose už Antanaitį, Jonaitį ir Petraitį pasiryžę balsuoti atitinkamai 15, 20 ir 25 procentai rinkėjų. Rinkimus laimi tas pretendentas, kuris gauna didžiausią skaičių rinkėjų balsų. Kiek mažiausiai procentų neapsisprendusių rinkėjų turi suagituoti Antanaitis, kad jis laimėtų mero rinkimus?

Sprendimas. Pagrindinis Antanaičio varžovas yra Petraitis, todėl jis turi suagituoti tokią neapsisprendusių rinkėjų dalį, kad pralenktų Petraitį net ir tuo atveju, jei visi likusieji (neapsisprendę) rinkėjai balsuotų už Petraitį.

Tegu n yra rinkėjų skaičius, o x yra neapsisprendusių rinkėjų dalis, kurią turėtų suagituoti Antanaitis; aišku, kad $0 < x \le 1$.

Pagal uždavinio sąlygą apsisprendusių rinkėjų skaičius yra

$$0{,}15n + 0{,}2n + 0{,}25n = 0{,}6n.$$

Taigi neapsisprendusių rinkėjų yra $0{,}4n$.

Skaičiui x rasti reikia išspręsti nelygybę

$$0{,}15n + x \cdot 0{,}4n > 0{,}25n + (1-x)\,0{,}4n.$$

Gausime $x > 0{,}625$.

Vadinasi, Antanaitis turėtų suagituoti daugiau kaip 62,5 % rinkėjų, kad garantuotai laimėtų rinkimus.

Ats.: daugiau kaip 62,5 %.

2. Vienu metu iš vietovių A ir B priešpriešiais išvažiavo du motociklininkai; atstumas tarp A ir B lygus 600 km. Kol pirmasis nuvažiuoja 250 km, antrasis nuvažiuoja tik 200 km. Raskite motociklininkų greičius, jeigu pirmasis į B atvyko 3 valandomis anksčiau negu antrasis į A.

Sprendimas. Motociklininkų greičius pažymėkime v_1 (pirmo) ir v_2 (antro).

Pagal uždavinio sąlygą $\dfrac{600}{v_2} - \dfrac{600}{v_1} = 3.$ Iš čia gauname, kad

$$v_1 v_2 = 200(v_1 - v_2). \tag{1}$$

Kadangi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{250}{200} = \frac{5}{4},$$

tai $v_2 = 0{,}8v_1$.

Tada iš (1) lygybės gauname lygtį $0{,}8v_1^2 = 200 \cdot 0{,}2v_1$, o iš jos ieškomą pirmo motociklininko greitį $v_1 = 50$ (km/h). Antro motociklininko greitis yra $v_2 = 0{,}8 \cdot 50 = 40$ (km/h).

Ats.: 50 km/h ir 40 km/h.

3. Dauginant du natūraliuosius skaičius, iš kurių vienas 75 vienetais didesnis už kitą, gauta klaidinga sandauga, 1000 mažesnė už tikrąją. Dalijant klaidingą sandaugą iš mažesnio skaičiaus gautas dalmuo 227 ir liekana 113. Raskite tuos du skaičius.

Sprendimas. Tegu x ir $y\,(x > y)$ yra ieškomieji skaičiai. Pagal uždavinio sąlygą $x - y = 75$ ir $\dfrac{xy-1000}{y} = 227 + \dfrac{113}{y}$.

Į pastarąją lygybę įrašę $y = x - 75$, gauname lygybę

$$x - \frac{1113}{x-75} = 227. \qquad (1)$$

Aišku, kad $y = x - 75 > 113$.

Kad galiotų (1) lygybė su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi x, skaičius 1113 turi dalytis iš $x - 75$.

Kadangi $1113 = 3 \cdot 7 \cdot 53$ ir $x - 75 > 113$, tai nagrinėtini tik trys atvejai:

1) $x - 75 = 3 \cdot 53 = 159 \Rightarrow x = 234$;

2) $x - 75 = 7 \cdot 53 = 371 \Rightarrow x = 446$;

3) $x - 75 = 1113 \Rightarrow x = 1188$.

Įrašę x reikšmę į (1) lygybę, gauname:

$$234 - 7 = 227,\ \ 446 - 3 \neq 227,\ \ 1188 - 1 \neq 227.$$

Taigi $x = 234$, $y = 159$.

Kitas sprendimo būdas. Tegu x ir $y\,(x > y)$ yra ieškomieji skaičiai, o z yra klaidingas daugybos rezultatas.

Tada pagal uždavinio sąlygą turi galioti tokios lygybės:

$$x - y = 75,\ xy = z + 1000,\ \frac{z-113}{y} = 227.$$

Iš jų gauname: $\begin{cases} y = x - 75, \\ z - 113 = 227y \end{cases} \Rightarrow z = 113 + 227(x-75) = 227x - 16912;$

$$x(x-75) = (227x - 16912) + 1000,$$

$$x^2 - 302x + 15912 = 0,\ x = 234 \ \text{ arba } \ x = 68.$$

Kadangi $68 < 75$, tai $x = 234$, $y = 159$.

Ats.: 234 ir 159.

4. Tarp keturženklių skaičių, kurių kraštinių skaitmenų kvadratų suma lygi 13, o vidurinių skaitmenų kvadratų suma lygi 85, raskite tokį, iš kurio atėmus 1089 gaunamas skaičius, parašytas tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka.

Sprendimas. Tegu ieškomasis skaičius yra $\overline{xyzt}$, $x \neq 0$.

Iš sąlygos

$$\overline{xyzt} - 1089 = \overline{tzyx} \qquad (1)$$

išplaukia, kad turi būti $x > t$.

Remdamiesi sąlyga $x^2 + t^2 = 13$ (perrankos būdu) nustatome, kad $x = 3$ ir $t = 2$.

Tada (1) lygybę galima pertvarkyti taip:

$$\overline{3yz2} - 1089 = \overline{2zy3},$$

$$(3000 + 100y + 10z + 2) - 1089 = 2000 + 100z + 10y + 3,\ y - z = 1.$$

Taigi $y = z + 1$. Tada įrašę $y = z + 1$ į sąlygą $y^2 + z^2 = 85$, gausime kvadratinę lygtį $z^2 + z - 42 = 0$, kurios sprendiniai yra –7 ir 6. Vadinasi, $z = 6$ ir $y = 7$. O ieškomasis keturženklis skaičius yra 3762.

Ats.: 3762.

5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių *n*, tenkinantį nelygybę

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 10.$$

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=$$

$$=-\left(\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\right)=\sqrt{n+1}-1,$$

tai pakanka išspręsti nelygybę $\sqrt{n+1}-1\geq 10$ ir rasti mažiausią natūralųjį sprendinį. Toks sprendinys yra $n=120$.

Ats.: 120.

6. Raskite tokius skaičius *x* ir *y*, kad skaičių $2x+2y$, $5x+y-1$, $4x+5y-7$ ir $7y-x-1$ seka būtų aritmetinė progresija.

Sprendimas. Pagal aritmetinės progresijos apibrėžimą turi galioti tokia lygybių sistema:

$$(5x+y-1)-(2x+2y)=(4x+5y-7)-(5x+y-1)=(7y-x-1)-(4x+5y-7).$$

Atlikę veiksmus, gausime sistemą $3x-y-1=-x+4y-6=-5x+2y+6$.

Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases}3x-y-1=-x+4y-6,\\ 3x-y-1=-5x+2y+6\end{cases}$$

ir gausime vienintelį sprendinį: $x=\frac{25}{14}$, $y=\frac{17}{7}$.

Įrašę tas *x* ir *y* reikšmes, gausime tokią skaičių seką: $\frac{59}{7}$; $\frac{145}{14}$; $\frac{86}{7}$; $\frac{199}{14}$.

Tai aritmetinė progresija, kurios skirtumas yra $d=\frac{27}{14}$.

Ats.: $x=\frac{25}{14}$, $y=\frac{17}{7}$.

7. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{x+3y}{y}$ didžiausią reikšmę, jei $\frac{4x^2-3xy+4y^2}{x^2+xy+y^2}=2$.

Sprendimas. Lygybę $\frac{4x^2-3xy+4y^2}{x^2+xy+y^2}=2$ pertvarkykime pažymėję $t=\frac{x}{y}$. Tada įrašę $x=ty$ gausime:

$$\frac{y^2(4t^2-3t+4)}{y^2(t^2+t+1)}=2,$$

$$4t^2-3t+4=2(t^2+t+1),$$

$$2t^2-5t+2=0,$$

$$t=\frac{1}{2}\quad\text{arba}\quad t=2.$$

Kadangi $\frac{x+3y}{y}=\frac{x}{y}+3=t+3,$ tai galimos tik dvi reiškinio $\frac{x+3y}{y}$ reikšmės: 3,5 ir 5. Antroji reikšmė didesnė.

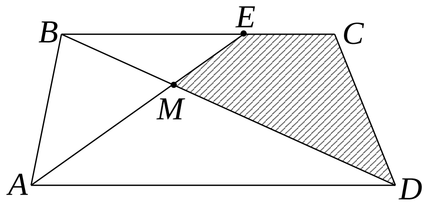
Ats.: 5.

8. Įrodykite, kad jei $x+y>2{,}6$ ir $x^2+y^2<4,$ tai $xy>1.$

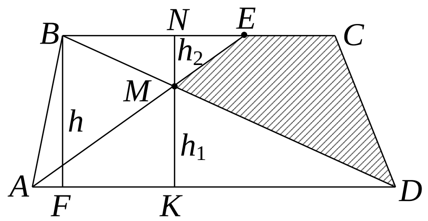
Įrodymas.

$$\begin{cases} x^2+y^2<4, \\ x+y>2{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2<4, \\ x^2+2xy+y^2>6{,}76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2-y^2>-4, \\ x^2+2xy+y^2>6{,}76 \end{cases} \Rightarrow 2xy>6{,}76-4 \Rightarrow xy>1.$$

9. Trapecijos *ABCD* (*žr.* pav.) kraštinėje *BC* pasirinktas taškas *E* dalija jos ilgį santykiu 2:1 ($BE:EC=2:1$). Raskite subrūkšniuotos srities *DMEC* plotą, jei $AD=12$ cm, $BC=9$ cm, o trapecijos *ABCD* plotas lygus 84 cm^2.



Sprendimas. Trapecijos *ABCD* aukštinės *BF* ilgį pažymėkime *h*, o trikampių *AMD* ir *BME* aukštinių (atitinkamai *MK* ir *MN*) ilgius pažymėkime $h_1$ir h_2.



Pagal uždavinio sąlygą $\frac{1}{2}(12+9)h=84,$

todėl $h=8.$

Aišku, kad $h_1+h_2=8$ ir $\frac{h_1}{h_2}=\frac{12}{6}=2.$ Iš čia gauname,

kad $h_2=\frac{8}{3}$ cm ir $h_1=\frac{16}{3}$ cm. Vadinasi, $S_{AMD}=32$ cm^2.

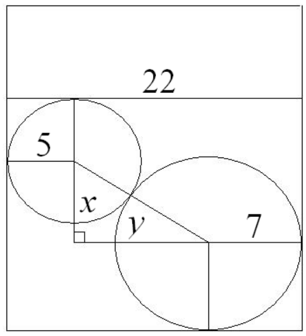
Kadangi $EC=3,$ tai $S_{AECD}=\frac{3+12}{2}\cdot 8=60,$ o $S_{DMEC}=S_{AECD}-S_{AMD}=60-32=28$ (cm^2).

*Ats.:*28 cm^2.

10. Į ritinio formos indą, kurio skersmuo 22 cm, įdėti du metaliniai rutuliukai, kurių skersmenys 10 cm ir 14 cm. Po to į indą įpilta 5 litrai vandens. Nustatykite, ar vanduo apsems rutuliukus.

Sprendimas. Pagal pavaizduotą indo ašinį pjūvį (*žr.* pav.) galima sudaryti tokias dvi lygtis:

$$x^2+y^2=(7+5)^2 \text{ ir } 5+y+7=22.$$



Spręsdami jų sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2=144, \\ y=10, \end{cases}$$

gauname $x=\sqrt{44}$ ir $y=10.$

Taigi atstumas nuo indo dugno iki antro rutuliuko viršaus yra $7+x+5=12+\sqrt{44}$ (cm).

Rutuliukų tūrių suma yra

$$\frac{4}{3}\pi(5^3+7^3)=624\pi.$$

Kadangi

$$\pi\cdot 11^2(12+\sqrt{44})-624\pi \approx (121\cdot 18{,}6-624)3{,}14=5107{,}52>5000.$$

tai rutuliukams apsemti 5 litrų (5000 cm^3) vandens nepakaks.

Ats.: Nepakaks.