ŠIRVINTŲ KRAŠTO
TREČIASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2015 m. spalio16 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

J1. Savivaldybės mero rinkimų biuletenyje buvo įrašyti trys kandidatai – *A*, *B* ir *C*. Balsuodami rinkėjai privalėjo išbraukti ne mažiau kaip du kandidatus. Skaičiuojant nustatyta, kad 60 % rinkėjų išbraukė kandidatus *A* ir *B*, 80 % rinkėjų išbraukė kandidatus *B* ir *C*, o 70 % rinkėjų išbraukė kandidatus *A* ir *C*. Apskaičiuokite, kiek procentų rinkėjų išbraukė visus kandidatus ir kuris kandidatas gavo didžiausią rinkėjų balsų skaičių.

Sprendimas. Rinkėjų skaičių pažymėkime *N*. Tegu *m* yra rinkėjų, išbraukusių tik *A* ir *B*, skaičius, *k* – rinkėjų, išbraukusių tik *B* ir *C*, skaičius, *l* rinkėjų, išbraukusių tik *A* ir *C*, skaičius, o *x* – rinkėjų, išbraukusių visus tris kandidatus, skaičius. Tada (pagal uždavinio sąlygą)

$$m + x = 0{,}6N,$$
$$k + x = 0{,}8N,$$
$$l + x = 0{,}7N.$$

Sudėję visas tris lygybes, gauname, kad

$$m + k + l + 3x = 2{,}1N.$$

Kadangi $m + k + l + x = N,$ tai

$$N + 2x = 2{,}1N \Rightarrow x = 0{,}55N.$$

Vadinasi, visus tris kandidatus išbraukė 55 % rinkėjų. Be to,

$$m = 0{,}6N - x = 0{,}6N - 0{,}55N = 0{,}05N,$$
$$k = 0{,}8N - x = 0{,}8N - 0{,}55N = 0{,}25N,$$
$$l = 0{,}7N - x = 0{,}7N - 0{,}55N = 0{,}15N.$$

Matome, kad $k > l > m.$ Tai reiškia, kad didžiausią rinkėjų balsų skaičių gavo kandidatas *A*.

Ats.: 55 %; kandidatas *A*.

J2. Po to, kai 1500 naujų indėlininkų kredito unijoje atidarė sąskaitas ir įnešė 7 800 000 eurų, visų indėlių vidurkis tapo 6000 eurų ir sumažėjo 10 procentų. Raskite pradinį indėlininkų skaičių.

Sprendimas. Ieškomą pradinį indėlininkų skaičių pažymėkime *x*. Jų indėlių vidurkis buvo $\frac{6\,000}{0{,}9} = \frac{20\,000}{3}$ eurų. Pagal uždavinio sąlygą, gauname, kad

$$\frac{\frac{20\,000}{3} \cdot x + 7\,800\,000}{x + 1500} = 6\,000,$$

o iš čia – $x = 1800.$

Ats.: 1800.

J3. Prie vienaženklio skaičiaus buvo pridėta 10. Jeigu gautą skaičių padidintume tiek procentų, kiek pradinis skaičius buvo padidintas pridedant 10, gautume 72. Raskite pradinį (vienaženklį) skaičių.

Sprendimas. Ieškomą skaičių pažymėkime *x*. Pagal uždavinio sąlygą, gauname lygybę

$$x+10+(x+10)\cdot\frac{10}{x}=72.$$

Iš čia išplaukia, kad $x=2$.

Ats.: 2.

J4. Dviženklio skaičiaus *N* skaitmenų suma lygi 10, sandaugos 7*N* skaitmenų suma lygi 70, o sandaugos 19*N* skaitmenų suma lygi 19. Raskite skaičių *N*.

Sprendimas. Ieškomasis skaičius yra $N=11111111110000000000$, nes jo skaitmenų suma $S(N)=10$ ir, be to,

$S(7N)=7\cdot 10=70,$

$$S(19N)=S(\underbrace{1111111111}_{10\text{ vienetų}}\cdot 19)=S(\underbrace{1111111111}_{10\text{ vienetų}}0+\underbrace{9999999999}_{10\text{ devynetų}})=S(2\underbrace{11111111}_{8\text{ vienetai}}09)=19.$$

Ats.: $\underbrace{1111111111}_{10\text{ vienetų}}\underbrace{0000000000}_{10\text{ vienetų}}$.

J5. Raskite didžiausią skaičių, kurį galima gauti išbraukus šimtą skaičiaus

$$12345678910111213141 5\ \ldots\ 979899100$$

skaitmenų.

Sprendimas. Pradinis skaičius turi $9+2\cdot 90+3=192$ skaitmenis. Išbraukę 100 skaitmenų gausime 92 skaitmenis turinti skaičių.

Aišku, kad reikia išbraukti pirmuosius aštuonis skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o paskui skaitmenų poras 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Tada skaitmenį 1, skaitmenų poras nuo 20 iki 28 ir skaitmenį 3. Taip skaičiaus pradžioje gausime tris skaitmenis 9. Analogiškai elgdamiesi braukome skaitmenis iki poros 48. Tada išbraukiame skaitmenį 4 ir skaitmenų poras 50, 52, 53, 54, 55, 56, skaitmenį 5 ir pagaliau palikę 7, išbraukiame dar vieną skaitmenį 5. Iš likusių 92 skaitmenų susidaro skaičius 9999978596061 ... 979899100.

Ats.: 9999978596061 ... 979899100

J6. Išbraukus dalį 1000-ženklio skaičiaus 1990 1990 ... 1990 skaitmenų, gaunamas skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 1990. Koks gali būti didžiausias išbrauktų skaitmenų skaičius?

Sprendimas. Pradinio 1000-ženklio skaičiaus 1990 1990 ... 1990 skaitmenų suma lygi

$$(1+9+9+0)+(1+9+9+0)+\ldots+(1+9+9+0)=19\cdot 250=4750.$$

Vadinasi, reikia išbraukti tuos skaitmenis, kurių suma lygi $4750-1990=3260$. Tokia suma susidaro iš 250 nulių, 247 vienetų ir 307 devynetų. Iš viso gauname $250+247+307=804$ skaitmenis.

Ats.: 804.

J7. Natūralųjį skaičių, kurio skaitmenis galima suskirstyti į dvi grupes taip, kad skaitmenų sumos būtų lygios, pavadinkime laimingu skaičiumi. Raskite mažiausią laimingą skaičių *a*, kad $a+1$ taip pat būtų laimingas skaičius.

Sprendimas. Iš laimingo skaičiaus apibrėžimo išplaukia, kad skaičiaus visų skaitmenų suma turi būti lyginis skaičius. Jeigu ieškomo skaičiaus *a* vienetų skaitmuo būtų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ar 8, tai skaičiaus $a+1$ skaitmenų suma būtų nelyginis skaičius. Vadinasi, skaičiaus *a* vienetų skaitmuo yra 9.

Taip pat lengva įsitikinti, kad skaičius *a* negali būti dviženklis. Todėl ieškokime triženklio skaičiaus $a=\overline{xy9}$, tenkinančio uždavinio sąlygą.

Kad $a=\overline{xy9}$ būtų laimingas skaičius, turi galioti lygybė $x+y=9$ ir sąlyga $y<9$. Vadinasi, $a+1=\overline{x(y+1)0}$. Šis skaičius yra laimingas tik kai $x=y+1$.

Lygčių $x+y=9$ ir $x=y+1$ sistema turi vienintelį sprendinį: $x=5$, $y=4$. Taigi $a=549$ ir $a+1=550$.

Ats.: 549.

J8. Kiek daugiausia neigiamų skaičių gali būti tarp šių skaičių: a, b, c, a^2-b, b^2-c ir c^2-a?

Sprendimas. Sudarykime tris skaičių poras: a ir c^2-a, b ir a^2-b, c ir b^2-c. Kiekvienoje poroje gali būti tik vienas neigiamas skaičius. Vadinasi, iš viso gali būti tik trys neigiami skaičiai.

Ats.: 3.

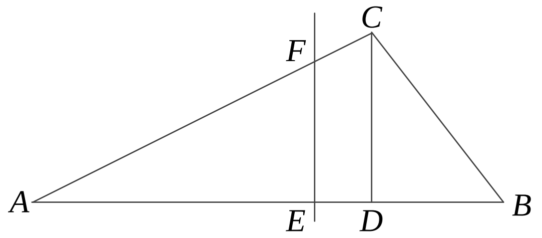
J9. Du šauliai, iššovę po 30 šūvių, į taikinį pataikė 44 kartus. Kiek kartų pataikė pirmas šaulys, jeigu kiekvienam jo šūviui pro šalį tenka dvigubai daugiau tikslių šūvių negu antro šaulio?

Sprendimas. Tegu x yra pirmo , o y – antro šaulio pataikymų skaičius. Tada (pagal uždavinio sąlygą) $x+y=44$ ir $\frac{x}{30-x}=2\cdot\frac{y}{30-y}$. Iš čia gauname, kad $y=44-x$ ir

$$\frac{x}{30-x}=2\cdot\frac{44-x}{x-14}\Rightarrow x^2-134x+2640=0\Rightarrow x=24.$$

Ats.: 24.

J10. Trikampio aukštinė dalija jo pagrindą į 36 cm ir 14 cm ilgio dalis, o lygiagreti su ja tiesė dalija trikampio plotą pusiau. Į kokias dalis ši tiesė dalija trikampio pagrindą?



Sprendimas. Tegu CD yra trikampio ABC aukštinė, kuri dalija pagrindą AB į 36 cm ir 14 cm ilgio atkarpas: $AD=36$ cm ir $DB=14$ cm, o tiesė EF yra lygiagreti su aukštine CD ir dalija trikampio ABC plotą pusiau.

Trikampio ABC plotą pažymėkime S. Kadangi $AB=AD+DB=36+14=50$, tai $S=25CD$.

Trikampio AEF plotas yra $S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot EF$. Remdamiesi sąlyga, kad $S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}S$, gauname lygybę $\frac{1}{2}AE\cdot EF=\frac{25}{2}CD$,

$$\frac{CD}{EF}=\frac{AE}{25}.$$

Iš trikampių ADC ir AEF panašumo gauname, kad

$$\frac{AD}{AE}=\frac{CD}{EF}.\Rightarrow\frac{36}{AE}=\frac{CD}{EF}.$$

Tada

$$\begin{cases}\frac{36}{AE}=\frac{CD}{EF},\\ \frac{CD}{EF}=\frac{AE}{25}\end{cases}\Rightarrow\frac{36}{AE}=\frac{AE}{25}\Rightarrow AE=30\ \text{(cm) ir}\ EB=50-30=20\ \text{(cm)}.$$

Ats.: 30 cm ir 20 cm.

ŠIRVINTŲ KRAŠTO
TREČIASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2015 m. spalio16 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

V1. Žiogas šokinėja tiesėje. Pirmą kartą jis nušoka 1 cm, antrą kartą – 2 cm, trečią kartą – 3 cm ir t. t. Ar po 125 šuoliukų žiogas gali atsidurti pradiniame taške? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Bendras žiogo nušuoliuotas kelias yra

$$1+2+3+...+125=\frac{1+125}{2}\cdot 125=7\,875 \text{ (cm).}$$

Šis skaičius yra nelyginis, todėl bendras kelias šuoliuojant į dešinę pusę negali būti lygus bendram keliui šuoliuojant į kairę pusę. Taigi po 125 šuoliukų žiogas tikrai negali sugrįžti į pradinį tašką.

Ats.: negali.

V2. Dėžėje yra N rutuliukų. Atidėjus į šalį 3 rutuliukus, iš dėžėje likusių rutuliukų susidarytų 11 vienodų krūvelių, o atidėjus dar 4 rutuliukus susidarytų 16 vienodų krūvelių. Dėliojant šių 16 krūvelių rutuliukus į 9 vienodas krūveles liktų 2 rutuliukai. Raskite mažiausią skaičių N.

Sprendimas. Tegu x, y ir z yra rutuliukų skaičius kiekvienoje krūvelėje, jei rutuliukai būtų dėliojami atitinkamai į 11, 16 ir 9 krūveles. Tada (pagal uždavinio sąlygą) turėtų galioti lygybės

$$11x=N-3,\;\; 16y=11x-4 \text{ ir } 9z=16y-2.$$

Iš čia gautume, kad

$$x=\frac{N-3}{11},\;\; y=\frac{N-7}{16},\;\; z=\frac{N-9}{9}.$$

Mažiausia N reikšmė yra 135; tada $x=12,\;\; y=8,\;\; z=14.$

Ats.: 135.

V3. Raskite trupmeną su pačiu mažiausiu vardikliu, kuri yra tarp trupmenų $\frac{1}{2015}$ ir $\frac{1}{2016}$.

Sprendimas. Tegu $\frac{p}{q}$ yra ieškomoji trupmena. Pagal uždavinio sąlygą, gauname:

$$\frac{1}{2016}<\frac{p}{q}<\frac{1}{2015}\Rightarrow 2015<\frac{q}{p}<2016.$$

Aišku, kad $p\neq 1.$ Pasirinkę $p=2,$ gauname:

$$4030<q<4032\Rightarrow q=4031.$$

Taigi $p=2,\;\; q=4031.$

Ats.: $\frac{2}{4031}$.

V4. Lyginio dviženklio skaičiaus $\overline{ab}$ ir skaičiaus $\overline{ba}$ sandauga lygi visų lyginių dviženklių skaičių sumai. Raskite skaičių $\overline{ab}$, jeigu jo skaitmenų suma lygi 9.

Sprendimas. Visų lyginių dviženklių skaičių suma yra $\frac{10+98}{2}\cdot 45 = 2\,430.$ Kadangi $\overline{ab} = 10a + b,$ $\overline{ba} = 10b + a,$ tai sprendžiame sistemą

$$\begin{cases}(10a+b)(10b+a) = 2430,\\ a+b=9\end{cases}$$

Ir gauname:

$$\begin{cases}10(a+b)^2 + 101ab = 2430,\\ a+b=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10(a+b)^2 + 81ab = 2430,\\ a+b=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}81ab = 2430-810,\\ a+b=9\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}81ab = 1620,\\ a+b=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ab = 20,\\ a+b=9\end{cases} \Rightarrow a=4,\ b=5 \text{ arba } \ a=5,\ b=4.$$

Ats.: 45 arba 54.

V5. Išspręskite lygtį

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x + 9 = 0.$$

Sprendimas. Kadangi

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x + 9 = (4x^2 - 12xy + 9y^2) + (x^2 + 6x + 9) = (2x-3y)^2 + (x+3)^2,$$

tai lygybė

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x + 9 = 0$$

galios tik kai $2x - 3y = 0$ ir $x = -3.$ Iš čia gauname vienintelį lygties sprendinį (–3; –2).

Ats.: (–3; –2).

V6. Raskite visus sveikųjų skaičių *x*, *y* ir *z* trejetus (*x*; *y*; *z*), kuriems esant galioja lygybė

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{7}{3}.$$

Sprendimas. Pertvarkę gauname lygtį

$$x + \frac{z}{yz+1} = \frac{7}{3}.$$

Iš jos matyti, kad turėtų būti tik $yz + 1 = 3$ arba $yz + 1 = -3.$

Jei $yz + 1 = 3$, tai $yz = 2.$ Tada galimi tik tokie atvejai:

1) $y = 1,\ z = 2;$
2) $y = 2,\ z = 1;$
3) $y = -1,\ z = -2;$
4) $y = -2,\ z = -1.$

Apskaičiavę *x*, gautume du sveikuosius sprendinius:

(2; 2; 1) ir (3; –1; –2).

Jei $yz + 1 = -3,$ tai $yz = -4.$ Galimi tik tokie atvejai:

1) $y = -4,\ z = 1;$
2) $y = -2,\ z = 2;$
3) $y = -1,\ z = 4;$
4) $y = 4,\ z = -1.$

Apskaičiavę *x*, gautume tris sveikuosius sprendinius:

(3; –2; 2), (1; 1; –4) ir (2; 4; –1).

Ats.: (2; 2; 1), (3; –1; –2), (3; –2; 2), (1; 1; –4), (2; 4; –1).

V7. Išspręskite nelygybę

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

Sprendimas. Iš sąlygos $1-\sqrt{1+2x} \neq 0$ išplaukia sąlyga $x \neq 0,$ o iš nelygybės $1+2x \geq 0$ – sąlyga $x \geq -0{,}5$.

Pažymėkime $t = \sqrt{1+2x}$. Tada $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$. Įrašę į nelygybę, gauname:

$$\frac{(t^2-1)^2}{(1-t)^2} < t^2+8 \Rightarrow \frac{(t-1)^2(t+1)^2}{(t-1)^2} < t^2+8 \Rightarrow (t+1)^2 < t^2+8 \Rightarrow 2t+1 < 8 \Rightarrow t < 3{,}5.$$

Iš nelygybės $\sqrt{1+2x} < 3{,}5$ gauname:

$$1+2x < 12{,}25 \Rightarrow x < 5{,}625.$$

Taigi $x \in [-0{,}5;\, 0) \cup (0;\, 5{,}625)$.

Ats.: $[-0{,}5;\, 0) \cup (0;\, 5{,}625)$.

V8. Žinoma, kad kvadratinio trinario x^2+px+q šaknų skirtumas lygus 7. Nustatykite, kokią mažiausią reikšmę gali įgyti šis kvadratinis trinaris.

Sprendimas. Tegu x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario x^2+px+q šaknys ir $x_1 > x_2$. Remdamiesi Vijeto teorema ir uždavinio sąlyga, sudarykime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q, \\ x_1-x_2 = 7. \end{cases}$$

Iš jos gauname, kad

$$x_1 = \frac{7-p}{2}, \quad x_2 = \frac{-7-p}{2} \text{ ir } q = \frac{p^2-49}{4}.$$

Kadangi $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, tai mažiausią reikšmę, lygią

$$q - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2-49}{4} - \frac{p^2}{4} = -49,$$

kvadratinis trinaris įgys taške $x = -\frac{p}{2}$.

Ats.: –49.

V9. Tegu *a*, *b*, *c* ir *d* yra iškilojo keturkampio kraštinių ilgiai, o *p* yra šio keturkampio perimetras. Įrodykite, kad galioja nelygybė

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} + \frac{d}{p-d} < 2.$$

Įrodymas. Kadangi keturkampis yra iškilasis, tai

$$p-a > a, \quad p-b > b, \quad p-c > c \text{ ir } p-d > d.$$

Iš čia gauname, kad

$$a < \frac{p}{2}, \quad b < \frac{p}{2}, \quad c < \frac{p}{2} \text{ ir } d < \frac{p}{2}.$$

Todėl

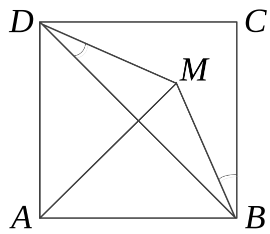
$$p-a > p-\frac{p}{2} = \frac{p}{2},$$
$$p-b > p-\frac{p}{2} = \frac{p}{2},$$
$$p-c > p-\frac{p}{2} = \frac{p}{2},$$
$$p-d > p-\frac{p}{2} = \frac{p}{2}.$$

Tada

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}+\frac{d}{p-d} < \frac{2a}{p}+\frac{2b}{p}+\frac{2c}{p}+\frac{2d}{p} = \frac{2}{p}(a+b+c+d) = 2.$$

V10. Taškas *M* yra kvadrato *ABCD* viduje. Raskite kampą *MAD*, jei $\angle MBC = \angle MDB = 21^\circ$.

Sprendimas. Aišku, kad taškas *M* yra trikampio *BCD* viduje. Remdamiesi uždavinio sąlyga, gauname, kad



$$\angle ABM = 69^\circ,\ \angle ADM = 66^\circ \text{ ir } \angle BMD = 135^\circ.$$

Įsitikinkime, kad $AM = AB$. Jei būtų $AM > AB$, tai gautume, kad

$$\angle AMB < \angle ABM = 69^\circ \text{ ir } \angle AMD < \angle ADM = 66^\circ,$$

o iš čia išplaukia, kad

$$\angle BMD = \angle AMB + \angle AMD < 69^\circ + 66^\circ = 135^\circ.$$

Tarę, kad $AM < AB$, gautume, kad $\angle AMB > 69^\circ$ ir $\angle AMD > 66^\circ$, o tai reikštų, kad $\angle BMD > 69^\circ + 66^\circ = 135^\circ$.

Kadangi trikampis *MAD* yra lygiašonis, tai

$$\angle MAD > 180^\circ - 2\cdot 66^\circ = 48^\circ.$$

Ats.: 48°.