VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2016 m. kovo 5 d.

UŽDAVINIAI

9 klasės mokiniams

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a - 2b = 29 + 4ab, \\ 2c - 2b = 11 + 4bc, \\ 2c + 2a = 9 - 4ca. \end{cases}$$

2. Lygiašonio trikampio ABC $(AB = AC)$ kraštinėje AB yra taškai K ir M, o kraštinėje AC – taškas L, tokie, kad $BC = CM = ML = LK = KA$. Raskite trikampio ABC kampus.

3. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis skaičius $\dfrac{n^3+3}{n^2+7}$ yra natūralusis.

4. Autobuso maršrute yra 11 stotelių, įskaitant pirmąją. Pirmojoje stotelėje įlipo 10 keleivių, po to kiekvienoje stotelėje, išskyrus paskutiniąją, įlipusių ir išlipusių keleivių suma buvo lygi 10. Kiekvienas keleivis važiavo daugiausiai 5 stoteles (t. y. įlipęs į autobusą k-tojoje stotelėje, keleivis išlipti turi ne vėliau kaip (k + 5)-ojoje stotelėje); be to, nebuvo momento, kad autobusas būtų važiavęs tuščias. Kiek daugiausiai vienu metu autobuse galėjo būti keleivių?

VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2016 m. kovo 5 d.

UŽDAVINIAI

10 klasės mokiniams

1. Įrodykite nelygybę

$$1-\frac{1}{2015}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)\geq\frac{1}{\sqrt[2015]{2016}}.$$

2. Duoti du apskritimai, neturintys bendrų taškų, ir nubrėžtos jų bendrosios išorinės liestinės. Viena jų pirmąjį apskritimą liečia taške *A*, o kita antrąjį liečia taške *D*. Tiesė *AD* dar kartą kerta pirmąjį apskritimą taške *B*, o antrąjį – taške *C*. Įrodykite, kad $AB = CD$.

3. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių *n*, kuriam skaičiai $\sqrt[5]{5n}$, $\sqrt[6]{6n}$ ir $\sqrt[7]{7n}$ yra natūralieji.

4. Autobuso maršrute yra 11 stotelių, įskaitant pirmąją. Pirmojoje stotelėje įlipo 10 keleivių, po to kiekvienoje stotelėje, išskyrus paskutiniąją, įlipusių ir išlipusių keleivių suma buvo lygi 10. Kiekvienas keleivis važiavo daugiausiai 5 stoteles (t. y. įlipęs į autobusą *k*-tojoje stotelėje, keleivis išlipti turi ne vėliau kaip (k + 5)-ojoje stotelėje); be to, nebuvo momento, kad autobusas būtų važiavęs tuščias. Kiek daugiausiai vienu metu autobuse galėjo būti keleivių?

VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2016 m. kovo 5 d.

UŽDAVINIAI

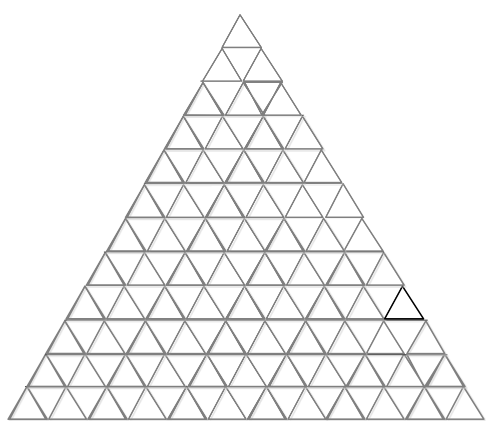
11 ir 12 klasių mokiniams

1. Agnė į savo turimą indą įpylė p litrų vandens, o Benas į savąjį indą įpylė q litrų vandens. Pakaitomis atlikdami ėjimus, jie žaidžia tokį žaidimą. Ėjimo metu žaidėjas iš savo indo į kito žaidėjo indą turi įpilti tiek vandens, kiek jo tuo metu yra kito žaidėjo inde. Žaidimą pradėjo Agnė. Po šimto ėjimų Agnės inde buvo q litrų vandens, o Beno – p litrų vandens. Raskite $\frac{p}{q}$.

2. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Spindulyje AB yra toks taškas Q, kad $AQ = CD$, o spindulyje AD – toks taškas P, kad $AP = BC$. Kokiu santykiu tiesė AC dalija atkarpą PQ?

3. Nustatykite, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičius $n \cdot 2^{2016} - 7$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

4. Lygiakraštis trikampis padalytas į 144 vienodus lygiakraščius trikampėlius (žr. 1 pav.). Tada n trikampėlių nudažyta juodai. Bet kurį iš likusių trikampėlių leidžiama taip pat nudažyti juodai, jei bent du iš trijų gretimų (bendrą kraštinę su juo turinčių) trikampėlių jau nudažyti. Paaiškėjo, kad vieną po kito dažant trikampėlius įmanoma nudažyti visą didįjį trikampį. Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?



1 pav.