VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2016 m. kovo 5 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

9 klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a-2b=29+4ab, \\ 2c-2b=11+4bc, \\ 2c+2a=9-4ca. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} 4ab-2a+2b=-29, \\ 4bc+2b-2c=-11, \\ 4ca+2c+2a=9. \end{cases}$$

Tai yra tas pats kaip

$$(2a+1)(2b-1)=-30,$$
$$(2b-1)(2c+1)=-12,$$
$$(2c+1)(2a+1)=10.$$

Pažymėjus $x=2a+1,\ \ y=2b-1,\ \ z=2c+1$, sistema tampa tokia:

$$\begin{cases} xy=-30, \\ yz=-12, \\ zx=10. \end{cases}$$

Sudauginę visas lygtis gausime

$$(xyz)^2=60^2 \Rightarrow xyz=\pm 60.$$

Atskirai imdami lygybes $xyz=60$ ir $xyz=-60$ ir dalydami jas iš *xy*, *yz* bei *zx*, gauname

$$x=-5,\ \ y=6,\ \ z=-2 \quad \text{ir} \quad x=5,\ \ y=-6,\ \ z=2.$$

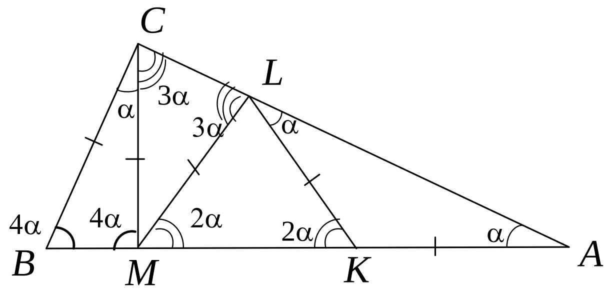
Rašant *a*, *b* ir *c* „kalba“, tai sprendiniai

$$a=-3,\ \ b=\frac{7}{2},\ \ c=-\frac{3}{2} \quad \text{ir} \quad a=2,\ \ b=-\frac{5}{2},\ \ c=\frac{1}{2}.$$

Ats.: $\left(-3; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ir $\left(2; -\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. Lygiašonio trikampio ABC $(AB=AC)$ kraštinėje AB yra taškai K ir M, o kraštinėje AC – taškas L, tokie, kad $BC=CM=ML=LK=KA$. Raskite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Sakykime (1 pav.), kad $\angle BAC=\alpha$. Kadangi $KA=KL$, tai trikampis ALK lygiašonis, ir $\angle ALK=\alpha$. Pagal priekampio savybę $\angle MKL=2\alpha$. Kadangi $LM=LK$, tai $\angle LMK=\angle MKL=2\alpha$. Tuomet vėl pagal priekampio savybę $\angle CLM=3\alpha$, nes kampas CLM yra trikampio MLA priekampis. Kadangi $CM=ML$, tai



1 pav.

$\angle LCM = \angle MLC = 3\alpha$. Kadangi kampas *BMC* yra trikampio *AMC* priekampis, tai $\angle BMC = 4\alpha$. Kadangi $BC = CM$, tai $\angle ABC = \angle BMC = 4\alpha = \angle ACB$. Tuomet $4\alpha + 4\alpha + \alpha = 180^\circ$ ir $\alpha = 20^\circ$. Taigi trikampio kampų didumai yra 20°, 80°, 80°. *Pastaba.* Taškus *K* ir *M* sukeitus vietomis, sprendimas iš esmės nepakinta.

Ats.: 20°, 80°, 80°.

3. Raskite visas natūraliąsias *n* reikšmes, su kuriomis skaičius $\dfrac{n^3+3}{n^2+7}$ yra natūralusis.

Sprendimas. Kadangi $\dfrac{n^3+3}{n^2+7} = n - \dfrac{7n-3}{n^2+7}$, tai $7n-3$ turi dalytis iš n^2+7. Skaičius $7n-3>0$ yra ne mažesnis už savo daliklį: $7n-3 \geq n^2+7$ ir $n^2-7n+10 \leq 0$. Kvadratinę nelygybę tenkina tik natūraliosios *n* reikšmės 2, 3, 4, 5. Iš jų uždavinio sąlygą tenkina $n=2$ ir $n=5$.

Ats.: 2 ir 5.

4. Autobuso maršrute yra 11 stotelių, įskaitant pirmąją. Pirmojoje stotelėje įlipo 10 keleivių, po to kiekvienoje stotelėje, išskyrus paskutiniąją, įlipusių ir išlipusių keleivių suma buvo lygi 10. Kiekvienas keleivis važiavo daugiausiai 5 stoteles (t. y. įlipęs į autobusą *k*-tojoje stotelėje, keleivis išlipti turi ne vėliau kaip (*k* + 5)-ojoje stotelėje); be to, nebuvo momento, kad autobusas būtų važiavęs tuščias. Kiek daugiausiai vienu metu autobuse galėjo būti keleivių?

Sprendimas. Sakykime, kad po *k*-tosios stotelės autobuse važiuoja $x(k)$ keleivių, čia $k = 1, 2, \dots, 10$. Kadangi kiekvienoje stotelėje gali įlipti daugiausia 10 keleivių, o vienu metu autobuse gali važiuoti tik keleiviai, įlipę ankstesnėse 5 stotelėse, tai $x(k) \leq 50$. Kita vertus, $x(k)$ yra lyginis skaičius, nes stotelėje įlipus n keleivių, o išlipus $10-n$ keleivių, bendras keleivių skaičius pakito $n-(10-n) = 2n-10$, t. y. lyginiu skaičiumi. Jei $x(k) = 50$, tai kiekvienoje iš penkių prieš tai buvusių stotelių įlipo po 10 keleivių, o neišlipo nė vieno. Tai gali būti tik tuo atveju, kai $k=5$, nes pagal sąlygą $x(k-5)=0$, t. y. į $(k-5)$-ąją stotelę autobusas atvyko tuščias. Bet po penktosios stotelės šeštojoje turi išlipti visi 10, įlipusių pirmojoje, po to – visi 10, įlipusių antrojoje, ir t. t., dešimtojoje turi išlipti visi, kurie įlipo penktojoje ir iki galinės stotelės autobusas važiuotų tuščias.

Taigi $x(k) < 50$, o atvejis $x(k) = 48$, kaip rodo lentelė, yra galimas.

Stotelė	Įlipę keleiviai	Išlipę keleiviai	Keleivių skaičius
1	$a_1\ a_2, \dots, a_{10}$	0	10
2	$b_1, b_2, \dots, b_{10}$	0	20
3	$c_1, c_2, \dots, c_{10}$	0	30
4	$d_1, d_2, \dots, d_{10}$	0	40
5	$e_1, e_2, \dots, e_9$	a_{10}	48
6	f_1	$a_1\ a_2, \dots, a_9$	40
7	0	$b_1, b_2, \dots, b_{10}$	30
8	0	$c_1, c_2, \dots, c_{10}$	20
9	0	$d_1, d_2, \dots, d_{10}$	10
10	g_1	$e_1, e_2, \dots, e_9$	2

Ats.: 48.

10 klasė

1. Įrodykite nelygybę

$$1-\frac{1}{2015}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)\geq\frac{1}{\sqrt[2015]{2016}}.$$

Įrodymas.

$$1-\frac{1}{2015}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)=\frac{1}{2015}\left(2015-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2016}\right)=$$

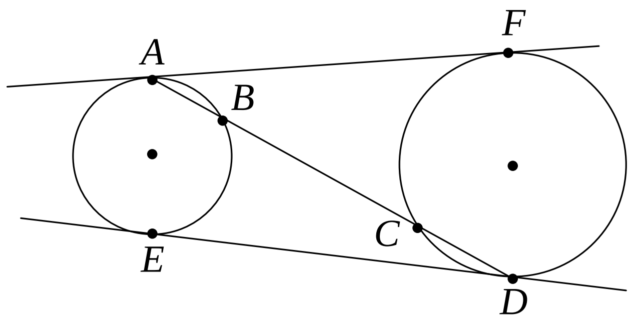
$$=\frac{1}{2015}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2016}\right)\right)=\frac{1}{2015}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2015}{2016}\right)\geq$$

$$\geq\sqrt[2015]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2016}}=\frac{1}{\sqrt[2015]{2016}}.$$

(Pritaikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę skaičiams $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{2015}{2016}$.)

2. Duoti du apskritimai, neturintys bendrų taškų, ir nubrėžtos jų bendrosios išorinės liestinės. Viena jų pirmąjį apskritimą liečia taške A, o kita antrąjį liečia taške D. Tiesė AD dar kartą kerta pirmąjį apskritimą taške B, o antrąjį – taške C. Įrodykite, kad $AB=CD$.

Įrodymas. Sakykime, kad pirmoji liestinė antrąjį apskritimą liečia taške F, o antroji pirmąjį – taške E (2 pav.). Dėl simetrijos centrų tiesės atžvilgiu teisinga lygybė $AF=ED$. Pagal liestinių ir kirstinių savybes turime lygybes $AC\cdot AD=AF^2=ED^2=DB\cdot DA$. Iš čia išplaukia, kad $AC=DB$, taigi $AB=AC-CB=DB-CB=CD$.



2 pav.

3. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n, kuriam skaičiai $\sqrt[5]{5n}$, $\sqrt[6]{6n}$ ir $\sqrt[7]{7n}$ yra natūralieji.

Sprendimas. Tarkime, kad didžiausias penketo laipsnis, iš kurio dalijasi n, yra 5^a, o didžiausias penketo laipsnis, iš kurio dalijasi $\sqrt[5]{5n}$, yra 5^k. Didžiausias penketo laipsnis, dalijantis $5n$, yra $5^{a+1}=(5^k)^5=5^{5k}$, todėl $a+1=5k$ dalijasi iš 5. Analogiškai pats skaičius a dalijasi iš 6 ir iš 7, taigi iš 42. Iš eilės imdami $a=42,84,126,\ldots$, randame mažiausią tinkamą reikšmę 84.

Taigi n dalijasi iš 5^{84}. Analogiškai įrodoma, kad n dalijasi iš 2^{35}, 3^{35}, 7^{90}. Mažiausias toks skaičius $n=2^{35}\cdot3^{35}\cdot5^{84}\cdot7^{90}$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: $n=2^{35}\cdot3^{35}\cdot5^{84}\cdot7^{90}$.

4. Žr. 9 klasės 4 uždavinį.

11 ir 12 klasės

1. Agnė į savo turimą indą įpylė p litrų vandens, o Benas į savąjį indą įpylė q litrų vandens. Pakaitomis atlikdami ėjimus, jie žaidžia tokį žaidimą. Ėjimo metu žaidėjas iš savo indo į kito žaidėjo indą turi įpilti tiek vandens, kiek jo tuo metu yra kito žaidėjo inde. Žaidimą pradėjo Agnė. Po šimto ėjimų Agnės inde buvo q litrų vandens, o Beno – p litrų vandens. Raskite $\frac{p}{q}$.

Sprendimas. Vandens kiekį (litrais) induose po $2k$ ėjimų pažymėkime p_k ir q_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($p_0 = p,\ q_0 = q$). Po $2k+1$ ėjimo induose bus $p_k - q_k$ ir $2q_k$ litrų vandens, o po $2k+2$ ėjimų vandens bus po $p_{k+1} = 2p_k - 2q_k$ ir $q_{k+1} = 3q_k - p_k$ litrų. Bendras vandens kiekis s nekinta: $p_k + q_k = s$, todėl

$$p_{k+1} = 2p_k - 2(s - p_k) = 4p_k - 2s \text{ ir } \frac{p_{k+1}}{s} = 4\frac{p_k}{s} - 2 \Rightarrow \frac{p_{k+1}}{s} - \frac{2}{3} = 4\left(\frac{p_k}{s} - \frac{2}{3}\right).$$

Taigi seka $\frac{p_k}{s} - \frac{2}{3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, yra geometrinė progresija ir

$$\frac{p_k}{s} - \frac{2}{3} = 4^k\left(\frac{p_0}{s} - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{p_{50}}{s} - \frac{2}{3} = 4^{50}\left(\frac{p_0}{s} - \frac{2}{3}\right).$$

Tačiau $p_{50} = q_0 = s - p_0$, todėl

$$1 - \frac{p_0}{s} - \frac{2}{3} = 4^{50}\left(\frac{p_0}{s} - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{p}{s} = \frac{p_0}{s} = \frac{2\cdot 4^{50}+1}{3(4^{50}+1)} \Rightarrow \frac{q}{s} = \frac{s-p}{s} = 1 - \frac{p}{s} = \frac{4^{50}+2}{3(4^{50}+1)}.$$

Taigi $\frac{p}{q} = \frac{2\cdot 4^{50}+1}{4^{50}+2}$.

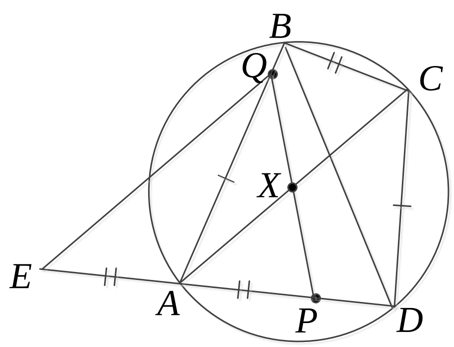
Ats.: $\frac{2\cdot 4^{50}+1}{4^{50}+2}$.

2. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Spindulyje AB yra toks taškas Q, kad $AQ = CD$, o spindulyje AD – toks taškas P, kad $AP = BC$. Kokiu santykiu tiesė AC dalija atkarpą PQ?

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė AC kerta atkarpą PQ taške X, o taškas E yra simetriškas taškui P taško A atžvilgiu (3 pav.). Kadangi keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, tai

$$\angle BAE = 180^\circ - \angle BAD = \angle BCD.$$

Kadangi $AE = AP = BC$, o $AQ = CD$, tai trikampiai AEQ ir CBD yra lygūs, taigi $\angle AEQ = \angle CBD = \angle CAD$. Todėl tiesės EQ ir AC yra lygiagrečios. Kadangi trikampyje EPQ taškas A yra kraštinės EP vidurio taškas, tai atkarpa AX yra jo vidurio linija, atkarpą PQ dalijanti pusiau.



3 pav.

Ats.: Tiesė AC dalija atkarpą PQ pusiau.

3. Nustatykite, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičius $n \cdot 2^{2016} - 7$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Remdamiesi matematinės indukcijos principu įrodysime tokį teiginį: sekoje $7+1^2, 7+2^2, 7+3^2, \ldots$ yra narių, besidalijančių iš kiek norima didelio dvejeto laipsnio.

Pastebėkime, kad $7+1^2$ dalijasi iš 2^3. Tarkime, kad kuris nors sekos narys $7+a^2$ dalijasi iš 2^k, bet ne iš 2^{k+1} $(k=3, 4, ...)$. Reikia įrodyti, kad yra sekos narys, besidalijantis iš didesnio dvejeto laipsnio. Kadangi skaičiai a ir $\frac{7+a^2}{2^k}$ nelyginiai, tai skaičius $\frac{7+a^2}{2^k}+a+2^{k-2}$ lyginis, todėl sekos narys $7+(a+2^{k-1})^2=(7+a^2)+2^k a+2^{2k-2}=2^k\left(\frac{7+a^2}{2^k}+a+2^{k-2}\right)$ dalijasi iš 2^{k+1}. Teiginys įrodytas.

Taigi egzistuoja toks $m\in N$, kad $7+m^2$ dalijasi iš 2^{2016}, t. y. $7+m^2=2^{2016}\cdot n$, kur $n\in N$, ir su šia n reikšme skaičius $n\cdot 2^{2016}-7$ yra skaičiaus m kvadratas.

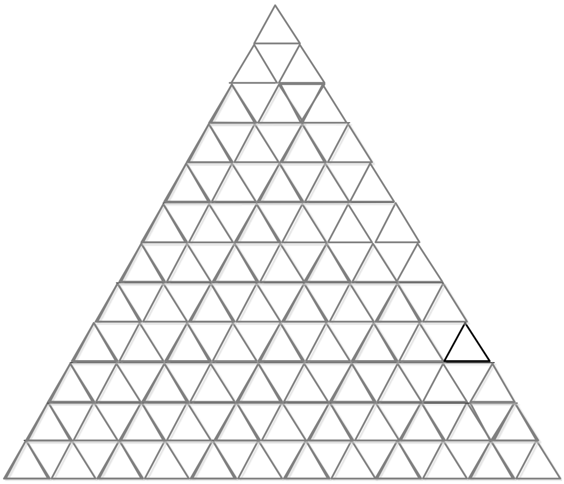
Ats.: Taip, egzistuoja.

4. Lygiakraštis trikampis padalytas į 144 vienodus lygiakraščius trikampėlius (žr. 1 pav.). Tada n trikampėlių nudažyta juodai. Bet kurį iš likusių trikampėlių leidžiama taip pat nudažyti juodai, jei bent du iš trijų gretimų (bendrą kraštinę su juo turinčių) trikampėlių jau nudažyti. Paaiškėjo, kad vieną po kito dažant trikampėlius įmanoma nudažyti visą didįjį trikampį. Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

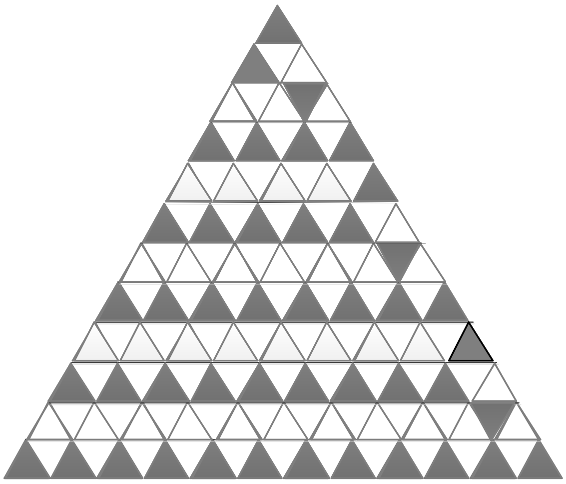
Sprendimas. Sąlygą tenkina $n=45$ (žr. 2 pav.)

Jei $n\leq 44$, tai nudažytos didžiojo trikampio dalies perimetras ne didesnis nei $3n\leq 132$ (trikampėlio kraštinės ilgį imame 1). Nudažant po vieną papildomą trikampėlį, nudažytos dalies perimetras sumažėja bent 1 (dvi vienetinės atkarpos atsiduria juodos figūros viduje ir prisideda tik viena nauja atkarpa). Papildomai nudažyti reikia bent $144-44=100$ trikampėlių ir taip perimetrą sumažinti iki daugiausiai $132-100=32$. Tačiau viso nudažyto trikampio perimetras lygus $36>32$, taigi visų trikampėlių nudažyti nepavyks.

Ats.: 45.



1 pav.



2 pav.