**VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2017 m. kovo 4 d.

## UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

## 9 klasė

**1.** Įrodykite, kad bet kuriems teigiamiems skaičiams *a, b* ir *c* teisinga nelygybė

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\ge\frac{9}{2(ab+bc+ca)}\,.$$

*Įrodymas.* Du kartus pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, vieną kartą trims duotosioms trupmenoms, o kitą – vardiklyje, gauname

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)c(b+c)a(c+a)b}}\ge$$

$$\ge\frac{3\cdot 3}{(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b}=\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

**2.** Ar panaudojus po lygiai vieną kartą visus dešimt skaitmenų 0, 1, 2, ... , 9 galima užrašyti du natūraliuosius skaičius, kad vienas skaičius būtų kito kvadratas?

*Pastaba.* Pirmasis skaičiaus skaitmuo negali būti nulis.

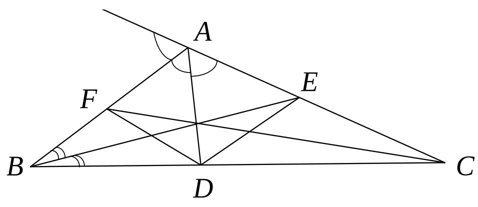
*Sprendimas.* Jei skaičius yra triženklis ar mažesnis, tai jo kvadratas yra daugiausiai šešiaženklis $(999^2<1\,000\,000)$ ir yra panaudojami daugiausiai 9 skaitmenys.

Jeigu skaičius yra bent keturženklis, tai jo kvadratas yra mažiausiai septynženklis $(1000^2\ge 1\,000\,000)$ ir reikės mažiausiai $4+7=11$ skaitmenų.

*Ats.:* negalima.

**3.** Atkarpos *AD, BE, CF* yra trikampio *ABC* su kampu $\angle A=120^\circ$ pusiaukampinės. Raskite kampą *EDF*.

*Sprendimas.* Turime $\angle BAD=\angle DAC=60^\circ=180^\circ-\angle BAC$ (žr. pav.). Tiesė *AF* yra trikampio *ADC* išorinė pusiaukampinė, todėl ji to trikampio vidaus kampo *ACD* pusiaukampinę *CF* kerta taške *F*, kuris yra trikampio *ACD* išoriškai įbrėžto apskritimo centras, taigi ir tiesė *DF* yra kampo *ADB* pusiaukampinė. Analogiškai įrodome, kad tiesė *DE* yra kampo *ADC* pusiaukampinė. Kadangi gretutinių kampų pusiaukampinės yra statmenos, tai $\angle EDF=90^\circ$.




*Ats.:* 90°.

**4.** Lentelę sudaro 6 eilutės ir 7 stulpeliai. Į visus jos langelius įrašyta po skaičių 0 arba 1. Bet kurių dviejų eilučių skaičių sumos skirtingos, o kiekvieno stulpelio skaičių suma lygi *a*. Raskite visas galimas *a* reikšmes.

*Sprendimas.* Kiekvienos eilutės skaičių suma yra vienas iš skaičių 0, 1, 2, ..., 7. Visos 6 sumos skirtingos, todėl visų lentelės skaičių suma *S* yra tarp skaičių $0+1+2+3+4+5=15$ ir $2+3+4+5+6+7=27.$ Kita vertus, $S=7a$ dalijasi iš 7. Taigi, $S=21$ ir $a=S:7=3.$

*Ats.:* $a=3.$

## 10 klasė

**1.** Raskite visas sveikųjų skaičių poras ($a$, $b$), kurioms egzistuoja tokie sveikieji skaičiai $x$ ir $y$, kad

$$8x^4 + 8y^4 = a^4 + 6a^2b^2 + b^4.$$

*Sprendimas.* Jei $a$ ir $b$ yra to paties lyginumo, tai imkime $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a-b}{2}$. Tada $x$ ir $y$ yra sveikieji skaičiai ir, įrašius šias išraiškas į lygybę, ji virsta tapatybe.

Jeigu $a$ ir $b$ nėra to paties lyginumo skaičiai, tai dešinioji lygybės pusė yra nelyginis skaičius ir lygybė galioti negali.

*Ats.:* visos poros ($a$, $b$), kur $a$ ir $b$ abu lyginiai arba abu nelyginiai.

**2.** Raskite visas sveikųjų skaičių $m$ ir $n$ poras ($m$, $n$), tenkinančias lygybę

$$m^2 + 2m - 9 = n^2 + n.$$

*Sprendimas.* Padauginę lygybę iš 4 ir išskyrę pilnuosius kvadratus, gauname

$$(2m+2)^2 - 39 = (2n+1)^2.$$

Toliau galima išskaidyti: $(2m-2n+1)(2m+2n+3) = 39$.

Kadangi dešinę pusę galima išskaidyti 8 būdais:

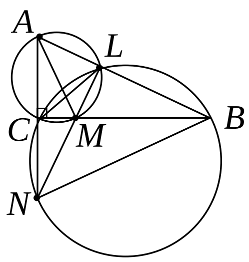
$$39 = 1 \cdot 39 = 39 \cdot 1 = 3 \cdot 13 = 13 \cdot 3 = (-1)\cdot(-39) = (-39)\cdot(-1) = (-3)\cdot(-13) = (-13)\cdot(-3),$$

tai gausime 8 sistemas, turinčias 8 sprendinius, kurie yra (–11, –10), (9, –10), (–5, –3), (3, –3), (–5, 2), (3, 2), (–11,9), (9, 9).

*Ats.:* (–11, –10), (9, –10), (–5, –3), (3, –3), (–5, 2), (3, 2), (–11,9), (9, 9).

**3.** Stačiojo trikampio $ABC$ įžambinėje $AB$ pažymėtas taškas $L$. Apie trikampį $ACL$ apibrėžtas apskritimas kerta tiesę $BC$ taške $M \neq C$, o apie trikampį $BCL$ apibrėžtas apskritimas kerta tiesę $AC$ taške $N \neq C$. Raskite kampą tarp tiesių $AM$ ir $BN$.

*Sprendimas.* Nagrinėkime brėžinyje pateiktą situaciją, kiti atvejai analogiški. Kadangi kampas $ACM$ yra statusis, tai atkarpa $AM$ yra apie trikampį $ACL$ apibrėžto apskritimo skersmuo. Iš čia išplaukia, kad $\angle ALM = 90°$. Analogiškai atkarpa $NB$ yra apie trikampį $BCL$ apibrėžto apskritimo skersmuo, todėl $\angle NLB = 90°$. Iš čia išplaukia, kad taškai $M$, $N$, $L$ yra vienoje tiesėje, statmenoje tiesei $AB$. Taigi tiesės $NL$ ir $BC$ yra trikampio $ANB$ aukštinės, o taškas $M$ yra jo ortocentras. Tuomet ir tiesė $AM$ yra to trikampio aukštinė, taigi $AM \perp BN$.




*Ats.:* 90°.

**4.** Žr. 9 klasės 4 uždavinį.

## 11 ir 12 klasės

**1.** Ar egzistuoja trikampis su kraštinių ilgiais $x$, $y$ ir $z$, tenkinančiais sąlygą

$$3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 = x^4 + y^4 + z^4 ?$$

*Sperendimas.* Perrašome lygybę

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = -(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Toliau išskaidome kairiąją pusę ir gauname

$$(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = -(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Dabar dešinė pusė yra neigiama, o kairė pusė, jeigu $x$, $y$ ir $z$ būtų trikampio kraštinių ilgiai, būtų teigiama pagal trikampio nelygybę.

*Ats.:* neegzistuoja.

**2.** Raskite lygties
$$x^2y^2 + 208 = 4(DBD(x, y) + MBK(x, y))^2$$
visus natūraliuosius sprendinius $(x, y)$. Čia $DBD(x, y)$ ir $MBK(x, y)$ atitinkamai žymi skaičių $x$ ir $y$ didžiausią bendrą daliklį ir mažiausią bendrą kartotinį.

*Sprendimas.* Jei $d = DBD(x, y)$, $k = MBK(x, y)$, $x_1 = x : d$, $y_1 = y : d$, tai $x = dx_1$, $y = dy_1$, $DBD(x_1, y_1) = 1$, $k = dx_1y_1$ ir $kd = d^2x_1y_1 = dx_1 \cdot dy_1 = xy$. Tada lygtį galima užrašyti taip:
$$d^2k^2 + 208 = 4(d + k)^2 \Rightarrow (2d + 2k - dk)(2d + 2k + dk) = 208.$$

Kadangi $208 = 4^2 \cdot 13$, tai bent vienas iš skaičių
$$2d + 2k - dk \text{ ir } 2d + 2k + dk$$
dalus iš 4. Jų suma $4d + 4k$ dali iš 4, todėl jie abu dalūs. Skaičius $2d + 2k + dk$ teigiamas ir didesnis iš dviejų, todėl tegali būti lygus $4 \cdot 13 = 52$, o $2d + 2k - dk = 4$. Tada
$$d + k = (52 + 4) : 4 = 14, \quad dk = (52 - 4) : 2 = 24.$$

Pagal Vijeto teoremą $d$ ir $k$ yra trinario $X^2 - 14X + 24$ šaknys, ir $k \ge d$. Todėl $d = 2$, $k = 12$. Pagal $d$ ir $k$ apibrėžimą $x$ ir $y$ abu dalijasi iš $d$ ir abu dalija $k$. Jie gali būti lygūs 2, 4, 6, 12, vienas iš jų dalus iš 3. Tinka tik (2, 12), (12, 2), (4, 6), (6, 4). Nesunku patikrinti, kad visi šie sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą.

*Ats.*: (2, 12), (12, 2), (4, 6), (6, 4).

**3.** Žr. 10 klasės 3 uždavinį.

**4.** Lentoje užrašytas skaičius 636363. Du žaidėjai $A$ ir $B$ pakaitomis atlieka ėjimus, pirmąjį ėjimą atlieka $A$. Ėjimo metu reikia nutrinti lentoje esantį skaičių ir užrašyti jo ir bet kurio jo natūraliojo daliklio skirtumą. Žaidėjas, užrašęs skaičių 0, pralaimi. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.

*Sprendimas.* Nelyginio skaičiaus visi dalikliai nelyginiai. Todėl po pirmojo ėjimo skaičius bus lyginis. Žaidėjo $B$ strategija gali būti tokia: iš esamo skaičiaus visada atimti vienetą. Tada po jo ėjimo skaičius ant lentos taps nelyginis, po $A$ ėjimo, atėmus nelyginį daliklį, vėl lyginis, ir t. t. Žaidėjas $B$ negali pralaimėti, nes po jo ėjimo skaičius visada nelyginis, taigi nelygus 0. Kadangi atimant daliklį skaičius mažėja ir lieka neneigiamas, tai nulį parašys bei pralaimės žaidėjas $A$.

*Ats.:* pergalės strategiją turi žaidėjas $B$.