2016 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

65-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Šiauliai, 2016 03 22

1 (9-10 klasės). Raskite visus lygties $15a^2-8ab+b^2+8a-2b+38=0$ sveikuosius sprendinius (a,b).

Sprendimas. Kadangi $(b-3a)(b-5a)=15a^2-8ab+b^2$, tai kairioji lygties pusė yra lygi

$$(b-3a)(b-5a)+8a-2b+38=(b-3a)(b-5a)-(b-3a)-(b-5a)+38=$$
$$=(b-3a-1)(b-5a-1)+37.$$

Vadinasi, duotoji lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$(b-3a-1)(b-5a-1)=-37.$$

Kadangi $a,b\in\mathbb{Z}$, o 37 – pirminis skaičius, tai lygybė galioja tada ir tik tada, kai vienas iš dauginamųjų kairiojoje pusėje lygus 1, o kitas -37, arba kai vienas lygus -1, o kitas 37. Belieka išnagrinėti šiuos keturis atvejus.

Jei $b-3a-1=1$ ir $b-5a-1=-37$, tai $2a=1-(-37)=38$. Vadinasi, $a=19$ ir $b=3a+2=59$. Taigi šias lygybes (o tuo pačiu ir duotąją lygtį) tenkina pora $(a,b)=(19,59)$. Jei $b-3a-1=-37$ ir $b-5a-1=1$, tai $2a=-37-1=-38$ ir nesunku įsitikinti, kad šias dvi lygybes tenkina pora $(a,b)=(-19,-93)$. Analogiškai, tuo atveju, kai $b-3a-1=-1$ ir $b-5a-1=37$, gauname porą $(a,b)=(-19,-57)$, o kai $b-3a-1=37$ ir $b-5a-1=-1$, gauname porą $(a,b)=(19,95)$.

Atsakymas: $(a,b)=(19,59)$, $(19,95)$, $(-19,-57)$ ir $(-19,-93)$.

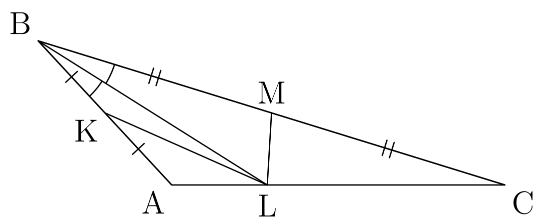
2 (9-10 klasės). Trikampio ABC kraštinės tenkina lygybę $AB+BC=2AC$, kampas B lygus 30°, atkarpa BL yra trikampio pusiaukampinė. Taškai K ir M yra atitinkamai kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Raskite kampą KLM.

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

Sprendimas. Pagal pusiaukampinės savybę, $AB : BC = AL : LC$, todėl

$$\frac{2AC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = \frac{AB}{BC} + 1 = \frac{AL}{LC} + 1 = \frac{AL + LC}{LC} = \frac{AC}{LC}.$$

Taigi $LC = \frac{BC}{2} = MC$, ir todėl trikampis LMC – lygiašonis.



Iš lygybės

$$AL = AC - LC = AC - \frac{BC}{2} = \frac{2AC - BC}{2} = \frac{AB + BC - BC}{2} = \frac{AB}{2} = AK$$

matome, kad trikampis LAK taip pat yra lygiašonis. Vadinasi,

$$\angle KLA + \angle CLM = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} + 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle B}{2} =$$
$$= 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\angle KLM = 180^\circ - \angle KLA - \angle CLM = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

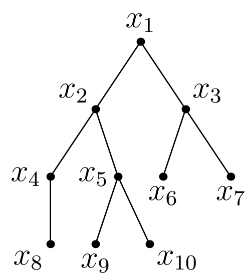
Atsakymas: $\angle KLM = 75^\circ$.

3 (9-10 klasės). Natūralusis skaičius $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}}$ vadinamas *tvarkingu*, jei jį sudaro dešimt skirtingų skaitmenų $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ $(0, 1, \ldots, 9)$, tenkinančių tokias nelygybes:

$$x_1 > x_2, \quad x_1 > x_3, \quad x_2 > x_4, \quad x_2 > x_5, \quad x_3 > x_6,$$
$$x_3 > x_7, \quad x_4 > x_8, \quad x_5 > x_9 \quad \text{ir} \quad x_5 > x_{10}.$$

a) Raskite mažiausią tvarkingą skaičių.
b) Kiek yra tvarkingų skaičių?

Sprendimas. Pavaizduokime nelygybes taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia iš bet kurių dviejų atkarpa sujungtų skaitmenų didesnis yra tas, kuris užrašytas aukščiau. Iš šios diagramos nesunku pastebėti, kad bet kuriame tvarkingame skaičiuje $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}}$ jo skaitmuo x_1 yra visada didesnis už likusius 9 skaitmenis x_i (čia $i = 2, 3, \ldots, 10$), taigi $x_1 = 9$ ir $\{x_2, x_3, \ldots, x_{10}\} = \{0, 1, \ldots, 8\}$.



a) Tegul $M = \overline{9x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}}$ yra mažiausias tvarkingas skaičius. Kadangi skaitmuo x_2 yra didesnis už penkis skaitmenis $x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}$, tai $x_2 \geqslant 5$, ir lygybė čia įmanoma tada ir tik tada, kai $\{x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Laikydami, kad $x_2 = 5$ ir $\{x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, gauname, jog $\{x_3, x_6, x_7\} = \{6, 7, 8\}$. Kadangi x_3 yra didžiausias šios aibės skaičius, tai $x_3 = 8$, o iš dviejų likusių variantų $(x_6, x_7) = (7, 6)$ ir $(6, 7)$ mažesnis skaičius M gaunamas antruoju atveju. Įrašę $(x_2, x_3, x_6, x_7) = (5, 8, 6, 7)$ į M, gausime $M = \overline{958x_4x_567x_8x_9x_{10}}$; čia $\{x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Kadangi $x_4 > x_8$, tai mažiausias įmanomas x_4 yra 1. Tada $x_8 = 0$. Pagal diagramą, iš likusių trijų skaitmenų $\{x_5, x_9, x_{10}\} = \{2, 3, 4\}$ skaitmuo x_5 turi būti didžiausias. Vadinasi, $x_5 = 4$, o likusiais dviem atvejais $(x_9, x_{10}) = (3, 2)$ ir $(2, 3)$ mažesnis skaičius M gaunamas antruoju atveju. Įrodėme, kad skaičius $M = 9581467023$ yra mažiausias tvarkingas skaičius.

b) Jau nustatėme, kad $x_1 = 9$. Išrinkti trejetą skaitmenų (x_3, x_6, x_7) iš aibės $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ mes galime 168 būdais. Iš tikrųjų, skaitmenį x_3 mes turime rinktis iš aibės $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, kadangi jis yra didesnis ir už x_6, ir už x_7. Jei $x_3 = k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, tai iš aibės $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ porą (x_6, x_7) galime išrinkti $k(k-1)$ būdų. Taigi iš viso gauname

$$\sum_{k=2}^{8} k(k-1) = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168$$

būdus išrinkti ketvertą (x_1, x_3, x_6, x_7).

Šešetą skaitmenų $(x_2, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10})$ mums reikia rinktis iš 6 likusių skaitmenų aibės. Kadangi x_2 yra didžiausias iš visų šių skaitmenų, tai jis automatiškai parenkamas kaip didžiausias šios aibės skaičius. Iš likusių 5 skaitmenų porą $x_4 > x_8$ išrinkti yra $4+3+2+1 = 10$ būdų. Dabar lieka parinkti tris skaitmenis x_5, x_9, x_{10} iš 3 likusių skaitmenų aibės. Kadangi x_5 yra didžiausias iš šių skaitmenų, tai jis parenkamas automatiškai, o išsirinkti likusius du x_9 ir x_{10} iš dviejų elementų aibės yra 2 būdai. Taigi skaitmenų šešetą išrinkti yra 20 skirtingų būdų.

Iš viso gauname $168 \cdot 20 = 3360$ skirtingų tvarkingų skaičių.

Atsakymas: a) 9581467023; b) 3360 skaičių.

4 (9-10 klasės). Tegul $n \geqslant 7$ yra toks natūralusis skaičius, kad skaičiai $n-1$ ir $n+1$ yra pirminiai. Įrodykite, kad skaičius $n^4 + 16n^2$ dalijasi:

a) iš 3;
b) iš 720.

Sprendimas. Pažymėkime $m = n^4 + 16n^2 = n^2(n^2 + 16)$.

a) Kadangi vienas iš trijų iš eilės einančių skaičių $n-1, n, n+1$ dalijasi iš 3, o $n-1$ ir $n+1$ nesidalija iš 3 (nes yra pirminiai ir didesni už 3), tai $n = 3k$ su $k \in \mathbb{N}$. Taigi $m = n^2(n^2+16) = 9k^2(9k^2+16)$ dalijasi iš 9 (todėl dalijasi ir iš 3).

b) Išskaidę duotąjį skaičių į tarpusavyje pirminius dauginamuosius, gauname $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5$. Vadinasi, pakanka įrodyti, kad skaičius m dalijasi iš 16, iš 9 (ką jau įrodėme a) dalyje) ir iš 5.

Kadangi $n-1$ nelyginis skaičius, tai n turi būti lyginis, t. y., $n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Todėl $m = n^2(n^2+16) = 4s^2(4s^2+16) = 16(s^4+4s^2)$ dalijasi iš 16.

Belieka įrodyti, kad m dalijasi iš 5. Kadangi vienas iš penkių iš eilės einančių skaičių $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ dalijasi iš 5 ir, be to, $n-1$ ir $n+1$ nesidalija iš 5, tai $n(n-2)(n+2) \mathrel{\vdots} 5$. Jei $n \mathrel{\vdots} 5$, tai akivaizdu, kad $m \mathrel{\vdots} 5$. Jei n nesidalija iš 5, tai $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$ dalijasi iš 5. Tada $n^2 + 16 = (n^2 - 4) + 20$ taip pat dalijasi iš 5, ir todėl vėl gauname, kad m dalijasi iš 5.

5 (11-12 klasės). Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygybę

$$f(x^3)f(y^2) = x^2 f(xy^2)$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – visų realiųjų skaičių aibė).

a) Nurodykite bent tris tokias funkcijas f.
b) Raskite visas tokias funkcijas f.

Sprendimas. a) Akivaizdu, kad funkcijos $f(x) = 0$ ir $f(x) = x$ tenkina duotąją lygybę. Nesunku įsitikinti, kad funkcija $f(x) = |x|$ taip pat tenkina duotąją lygybę, nes tada kairioji jos pusė yra $|x^3||y^2| = |x|^3y^2$, o dešinioji $x^2|xy^2| = |x|^3y^2$.

b) Įrašę $x = y = 0$, gausime $f(0)^2 = 0$, todėl $f(0) = 0$.

Tarkime, kad $f(x_0) = 0$ su kokiu nors $x_0 > 0$. Įrašykime $x = z/x_0$ su $z \neq 0$ ir $y = \sqrt{x_0}$. Tada $xy^2 = z$ ir $f((z/x_0)^3)f(x_0) = 0 = (z/x_0)^2 f(z)$. Vadinasi, $f(z) = 0$ su kiekvienu $z \neq 0$. Kadangi jau įrodėme lygybę $f(0) = 0$, tai iš čia išplaukia, kad $f(x) = 0$ su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$. Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina duotąją lygybę.

Priešingu atveju $f(x) \neq 0$ su visais $x > 0$. Tada, įrašę $x = y = z > 0$, gausime $f(z^3)f(z^2) = z^2 f(z^3)$. Kadangi $f(z^3) > 0$, tai, padaliję iš $f(z^3) \neq 0$, gauname lygybę $f(z^2) = z^2$ su kiekvienu $z > 0$. Be to, mes jau įrodėme, kad $f(0) = 0$. Kadangi kiekvieną $x \geqslant 0$ galima užrašyti pavidalu $x = z^2$ su $z \geqslant 0$, tai iš čia išplaukia, kad $f(x) = x$ su kiekvienu $x \geqslant 0$.

Pažymėkime $a = -f(-1)$ ir įrašykime $x = -1$ į lygybę $x^2 f(xy^2) = f(x^3)f(y^2)$. Tada, naudodamiesi lygybe $f(y^2) = y^2$ (kuri galioja, nes $y^2 \geqslant 0$), gauname

$$f(-y^2) = (-1)^2 f(-y^2) = f(-1)f(y^2) = -af(y^2) = -ay^2 = a(-y^2).$$

Kadangi bet kurį neigiamą x galima užrašyti pavidalu $x = -y^2$ su $y > 0$, tai iš aukščiau gautos lygybės išplaukia, kad $f(x) = ax$ su kiekvienu $x < 0$. Vadinasi,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ ax, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Įrodysime, kad su bet kokiu $a \in \mathbb{R}$ ši funkcija tenkina duotąją lygybę.

Iš tikrųjų, tai akivaizdu, kai $x = 0$ arba kai $y = 0$, nes tada abi lygybės pusės yra lygios nuliui. Tarkime, kad $xy \neq 0$. Jei $x > 0$, tai kairioji lygybės pusė bus x^3y^2, o dešinioji $x^2xy^2 = x^3y^2$ (lygybė galioja). Jei $x < 0$, tai $x^3 < 0$, $y^2 > 0$ ir $xy^2 < 0$. Vadinasi, kairioji lygybės pusė bus $f(x^3)f(y^2) = ax^3y^2$, o dešinioji $x^2 f(xy^2) = x^2 axy^2 = ax^3y^2$, taigi lygybė taip pat galioja.

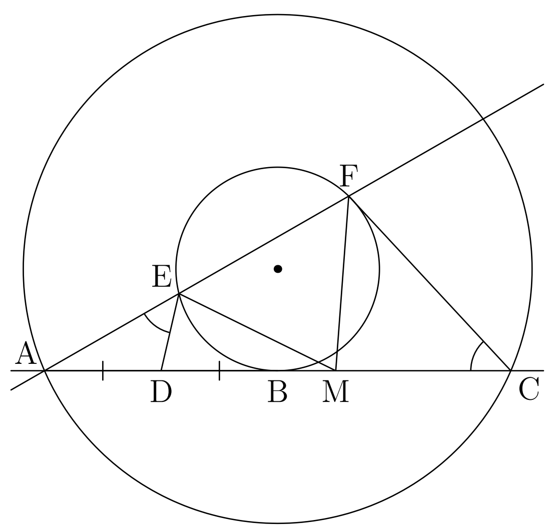
Atsakymas: a) pavyzdžiui, $f(x) = 0$, $f(x) = x$ ir $f(x) = |x|$; b) $f(x) = 0$ ir

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ ax, & \text{kai } x < 0; \end{cases}$$

čia a bet koks realusis skaičius.

6 (11-12 klasės). Duoti du apskritimai, turintys bendrą centrą. Mažesniojo apskritimo liestinė liečia jį taške B, o didesnįjį apskritimą kerta taškuose A ir C. Taškas D yra atkarpos AB vidurio taškas. Per tašką A nubrėžta tiesė kerta mažesnįjį apskritimą taškuose E ir F ($AE < AF$). Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas M, kad $DM = EM$ ir $MC = MF$. Raskite santykį $AM : MC$.

Sprendimas. Kadangi AF yra mažojo apskritimo kirstinė, o AB jo liestinė, tai $AE \cdot AF = AB^2$. Be to, $AB = 2AD$ ir $AB = \frac{AC}{2}$, taigi $AE \cdot AF = AD \cdot AC$. Iš čia matome, kad trikampių AED ir ACF kraštinės proporcingos $AE : AC = AD : AF$, o kampai DAE ir FAC lygūs, todėl šie trikampiai panašūs. Vadinasi, $\angle AED = \angle ACF$ (žr. brėžinį).



Taigi $\angle DEF + \angle DCF = 180^\circ - \angle AED + \angle ACF = 180^\circ$, todėl taškai D, E, F, C priklauso vienam apskritimui ω. Apskritimo ω centras yra stygų DE ir FC vidurio statmenų susikirtimo taškas. Kadangi $DM = EM$ ir $MC = MF$, tai taškas M priklauso abiems vidurio statmenims, taigi M ir yra apskritimo ω centras, todėl $DM = MC$.

Pažymėję $x = DM = MC$ ir $y = AD = DB$, matome, kad $AC = 2AB = 4AD = 4y$ ir $AC = AD + DM + MC = y + 2x$. Iš lygybės $4y = y + 2x$ gauname $y = \frac{2}{3}x$. Vadinasi, ieškomasis santykis $AM : MC$ yra lygus

$$\frac{AD + DM}{MC} = \frac{y + x}{x} = \frac{y}{x} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Atsakymas: $AM : MC = 5 : 3$.

7 (11-12 klasės). Krūvelėje yra 2016 saldainių. Hermina padalija krūvelę į dvi netuščias krūveles, po to bet kurią iš jų (aišku, jei joje yra daugiau kaip vienas saldainis) vėl padalija į dvi netuščias krūveles ir t. t., kol galiausiai lieka 2016 krūvelių po vieną saldainį. Ar visada (kad ir kaip bedalytų Hermina saldainius) bus toks momentas, kai iš visų tuo metu susidariusių krūvelių bus įmanoma:

a) pasirinkti 300 krūvelių, kuriose bus lygiai 1000 saldainių?
b) pasirinkti 500 krūvelių, kuriose bus lygiai 1000 saldainių?

Sprendimas. a) Įrodysime, kad galima taip dalyti saldainius į krūveles, kad jokiu momentu nebus įmanoma pasirinkti 300 krūvelių su lygiai 1000 saldainių. Tarkime, kad Hermina vis atskiria po 3 saldainius iš didesnės krūvelės iki tol, kol gaus 672 krūveles po 3 saldainius. Iki to momento kiekvienoje krūvelėje saldainių skaičius dalijasi iš 3 (nes 2016 dalijasi iš 3), taigi ir keliose krūvelėse esančių saldainių skaičius taip pat dalijasi iš 3. Vadinasi, niekada keliose krūvelėse (taigi ir jokiose 300 krūvelių) nebus lygiai 1000 saldainių. Po to, kaip Hermina bedalytų saldainius (esančius krūvelėse po 3 ir mažiau), bet kuriose 300 krūvelių bus daugiausiai 900 saldainių. Vadinasi, lygiai 1000 saldainių jokiose 300 krūvelių taip pat niekada nebus.

b) Įrodysime, kad visada atsiras toks momentas, kai bus įmanoma pasirinkti 500 krūvelių, kuriose bus lygiai 1000 saldainių. Po kiekvieno padalijimo krūvelių skaičius padidėja vienetu, taigi tam tikru momentu bus lygiai 1516 krūvelių. Tarkime, kad lygiai n iš jų yra po 1 saldainį. Jei $n \leqslant 1015$, tai iš viso saldainių yra ne mažiau kaip

$$1 \cdot n + 2 \cdot (1516 - n) = n + 3032 - 2n = 3032 - n \geqslant 3032 - 1015 = 2017,$$

prieštara. Vadinasi, $n \geqslant 1016$. Atskirkime bet kurias 1016 krūvelių, kuriose yra po 1 saldainį. Tada liks $1516 - 1016 = 500$ krūvelių, kuriose bus lygiai $2016 - 1016 = 1000$ saldainių.

Atsakymas: a) ne visada; b) visada.

8 (11-12 klasės). Sveikasis skaičius n vadinamas *keistu*, jei $\sqrt{3n^2+1}$ yra nelyginis sveikasis skaičius.

a) Nurodykite bent tris keistus skaičius n.
b) Įrodykite, kad su bet kuriuo keistu skaičiumi n skaičius $2 + 2\sqrt{3n^2+1}$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. a) Akivaizdu, kad skaičius $n = 0$ yra keistas. Be to, kadangi $\sqrt{3 \cdot 4^2 + 1} = 7$, tai skaičiai $n = 4$ ir $n = -4$ taip pat yra keisti.

b) Pažymėkime $\sqrt{3n^2 + 1} = 2k - 1$. Čia $k \in \mathbb{N}$, kadangi skaičius n yra keistas. Pakėlę abi lygybės puses kvadratu, gauname $3n^2 = 4(k^2 - k)$. Vadinasi, n yra lyginis, t. y., $n = 2m$ su $m \in \mathbb{Z}$. Taigi $k(k-1) = 3m^2$. Kadangi skaičiai k ir $k - 1$ yra tarpusavyje pirminiai, tai bet kuris pirminis skaičius p, dalijantis $3m^2$, įeina tik į vieno iš skaičių $k, k - 1$ skaidinį pirminiais dauginamaisiais. Vadinasi, arba $k = 3u^2$ ir $k - 1 = v^2$, arba $k = u^2$ ir $k - 1 = 3v^2$ (čia $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{Z}$ ir $uv = m$). Pirmuoju atveju, $k = 3u^2$ ir $k - 1 = v^2$, turi galioti lygybė $3u^2 = v^2 + 1$. Tačiau kairioji šios lygybės pusė dalijasi iš 3, o dešinioji nesidalija, kadangi sveikojo skaičiaus kvadrato (t. y., v^2) dalybos iš 3 liekana yra 0 arba 1, todėl $v^2 + 1 \pmod 3 = 1$ arba 2. Taigi šis atvejis neįmanomas. Antruoju atveju, $k = u^2$ ir $k - 1 = 3v^2$, iš lygybės $k = u^2$ (čia $u \in \mathbb{N}$) išplaukia, kad skaičius

$$2 + 2\sqrt{3n^2 + 1} = 2 + 2(2k - 1) = 2 + 4k - 2 = 4k = 4u^2 = (2u)^2$$

tikrai yra natūraliojo skaičiaus $2u$ kvadratas.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, $n = -4, 0, 4$.