Rietavo XVI komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2017 11 10

9–10 klasės

---

1 uždavinys. Išspręskite lygtį:

$$\frac{x}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{5\sqrt{3}+3}{2}.$$

2 uždavinys. Jonas Rietaviškis eina per geležinkelio tiltą. Perėjęs $\frac{4}{7}$ tilto jis pamato artėjantį traukinį. Čia Jonas suvokia du dalykus:

1. Būdamas ant tilto jis negali prasilenkti su traukiniu;
2. Jis turi lygiai tiek laiko, kiek reikia nubėgti į bet kurį tilto galą ir pasitraukti nuo bėgių prieš atvažiuojant traukiniui.

Kokiu greičiu važiuoja traukinys, jei Jonas Rietaviškis bėga 20 kilometrų per valandą greičiu?

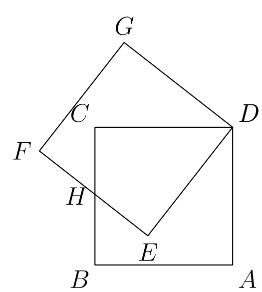
3 uždavinys. Paulius, Monika ir Andrius turi 21 vienodo dydžio uogienės stiklainį. Septyni iš jų yra pilni uogienės, septyni puspilniai, o septyni – visai tušti. Vaikai nori pasidalinti stiklainius taip, kad kiekvienas gautų po tiek pat stiklainių ir po tiek pat uogienės. Kaip jiems tai padaryti neperpilant uogienių?

4 uždavinys. Ar galima ant apskritimo esančius penkis taškus sujungti atkarpomis taip, kad kiekvienas iš šių penkių taškų būtų sujungtas lygiai su trimis kitais taškais?

5 uždavinys. Duotas trikampis, kurio kampai yra $36°$, $72°$ ir $72°$. Ar gali visų jo kraštinių ilgiai būti racionalieji skaičiai?

6 uždavinys. Įrodykite, kad sujungę bet kokio iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus gausime lygiagretainį.

7 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti du kvadratai $ABCD$ ir $DEFG$, kurių plotai yra 16. Jei H yra BC ir EF vidurio taškas, koks yra figūros $ABHFGD$ plotas?



8 uždavinys. Barbora sugalvoja kokį nors natūralųjį skaičių ir užrašo jį ant lapo, tada mintyse padaugina jį iš dviejų ir prirašo šį dvigubą skaičių šalia pirmojo iš dešinės, taip gaudama vieną „ilgą“ skaičių. Ar visada šis skaičius dalijasi iš šešių?

9 uždavinys. Koks mažiausias natūralusis skaičius tampa 57 kartus mažesnis nubraukus pirmąjį jo skaitmenį?

10 uždavinys. Tarkime, kad n yra dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Įrodykite, kad $2n$ taip pat yra dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma.

Rietavo XVI komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2017 11 10

11–12 klasės

---

1 uždavinys. Duota funkcija $y = x^2 - 6ax + a^4$; čia $|a| \leqslant 1$. Su kiekviena iš a reikšmių funkcijos mažiausią reikšmę pažymėkime $y_{\min}$. Su kuria parametro a reikšme $y_{\min}$ yra didžiausia?

2 uždavinys. Žinome, kad funkcijos $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$ reikšmė, kai $x = 7$ yra $f(7) = 7$. Kam lygi funkcijos $f(x)$ reikšmė, kai $x = -7$?

3 uždavinys. Įrodykite, kad jei $c + d = 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$ ir $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{1}{ac+bd}$, tai $a = b$.

4 uždavinys. Apskritimas padalintas į 4 sektorius. Į kiekvieną sektorių laikrodžio rodyklės kryptimi yra įrašyta po vieną skaičių: 1, 0, 1, 0. Kiekvienu ėjimu prie pasirinktų dviejų kaimyninių skaičių pridedame po vienetą. Ar įmanoma, kad po kažkurio ėjimo visuose sektoriuose esantys skaičiai būtų lygūs?

5 uždavinys. Stačiakampyje 20×17 Izabelė ir Mykolas paeiliui spalvina bet kokio dydžio iš langelių sudarytus kvadratus. Jokie du kvadratai negali persidengti. Žaidimą pralaimi tas, kuris nebegali nuspalvinti jokio kvadrato. Izabelė pradeda žaidimą. Kaip jai reikia žaisti, kad visada laimėtų žaidimą?

6 uždavinys. Duotas trikampis, kurio kampai yra $36°$, $72°$ ir $72°$. Ar gali visų jo kraštinių ilgiai būti racionalieji skaičiai?

7 uždavinys. Tiesėje AB padėtas toks taškas C, kad $AC = 3CB$. Apskritimų, kurių skersmenys yra AC ir CB, bendroji liestinė kerta tiesę AB taške D. Įrodykite, kad $BD = \frac{CB}{2}$.

8 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis žaidžia tokį žaidimą su laikrodžiu (laikrodžio ciferblatas su skaičiais nuo 1 iki 12): Jonas pasirenka kokį nors skaičių nuo 1 iki 12, bet nesako, kokį. Tada Petras pradeda rodyti į skaičius laikrodyje, o sulig kiekvienu Petro parodytu skaičiumi Jonas prie savo sugalvotojo skaičiaus mintyse prideda po 1. Kai Jonas gauna skaičių 20, jis pasako „stop“. Kaip Petrui reikia rodyti į skaičius laikrodyje, kad kai Jonas pasako „stop“, Petro rodomas skaičius būtų tas pats, kokį Jonas sugalvojo iš pradžių?

9 uždavinys. Lentoje surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 10^6. Kiekvienu ėjimu kiekvieną skaičių pakeičiame jo skaitmenų suma. Taip darome tol, kol visi lentoje surašyti skaičiai tampa vienaženkliai. Ko lentoje bus daugiau – vienetukų ar dvejetukų?

10 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais egzistuoja pirminiai skaičiai p, q ir r, tenkinantys lygybę $p^n + q^2 = r^2$.