ALYTAUS APSKRITIES XXI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2017 m. gruodžio 1 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Septyniolika darbininkų per 12 dienų uždirba 1020 litų. Kiek gauna trylika darbininkų per 7 dienas?

Sprendimas. Remdamiesi sąlyga, gauname, kad vienas darbininkas per 12 dienų uždirba $1020:17=60$ litų, o per vieną dieną uždirba $60:12=5$ litus.

Vadinasi, 13 darbininkų per 7 dienas uždirba $13(7\cdot 5)=13\cdot 35=455$ litus

Ats.: 455.

2. Dėžė yra stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pavidalo, stačiakampis $ABCD$ yra jos dugnas, $AB=60$ cm, $AD=40$ cm, $AA_1=40$ cm. Iš viršūnės D_1 į viršūnę B ropoja musė. Kuris kelias jai yra trumpiausias ir kokio jis ilgio?

Sprendimas. Sakykime, kad dėžės viršus atidaromas taip, kad gautųsi stačiakampis ABC_1D_1. Trumpiausias kelias iš viršūnės D_1 į viršūnę B yra atkarpa D_1B, kurios ilgis

$$D_1B=\sqrt{AD_1^2+AB^2}=\sqrt{80^2+60^2}=100 \text{ cm}.$$

Ats.: 100 cm.

3. Smarkus lietus lijo be perstojo 6 valandas ir užpildė dalį atviro baseino. Nustojus lyti, siurblys visą vandenį išsiurbė per 2 valandas. Per kiek laiko tas pats siurblys visą vandenį būtų išsiurbęs tęsiantis lietui? Spręsdami turėkite mintyje, kad lietus lijo tolygiai, o siurblio darbo tempas pastovus.

Sprendimas. Tegu v_1 yra lietaus, o v_2 – siurblio darbo tempas (dalis baseino tūrio (prilyjamo arba išsiurbiamo) per valandą), o t –ieškomas laikas. Pagal uždavinio sąlygą, $6v_1=2v_2$ ir $6v_1+tv_1=tv_2$. Vadinasi, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases}6v_1=2v_2,\\ 6v_1+tv_1=tv_2.\end{cases}$$

Gauname:

$$\begin{cases}v_2=3v_1,\\ t(v_2-v_1)=6v_1\end{cases}\Rightarrow t=\frac{6v_1}{v_2-v_1}=\frac{6v_1}{3v_1-v_1}=3.$$

Taigi per 3 valandas siurblys būtų išsiurbęs visą baseine esantį vandenį.

Ats.: 3 h.

4. Įrodykite, kad sveikųjų skaičių m ir n suma $m+n$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, jeigu

$$(m-n)^2=\frac{4mn}{m+n-1}.$$

Įrodymas. Kadangi $(m-n)^2=(m+n)^2-4mn,$ tai nagrinėdami lygybę $(m-n)^2=\dfrac{4mn}{m+n-1},$ gausime:

$$(m+n)^2-4mn=\frac{4mn}{(m+n)-1},$$

$$(m+n)^3-(m+n)^2-4mn(m+n)+4mn=4mn \quad (\text{kai } m+n\neq 1),$$
$$(m+n)((m+n)^2-(m+n)-4mn)=0,$$
$$(m+n)(m^2+2mn+n^2-m-n-4mn)=0,$$
$$(m+n)((m-n)^2-(m+n))=0.$$

Taigi $m+n=0$ arba $m+n=(m-n)^2$.

5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalijant iš 3 gaunama liekana 2, dalijant iš 5 – liekana 3, o dalijant iš 7 gaunama liekana 2.

Sprendimas. Tegu *n* yra ieškomas skaičius. Pagal sąlygą,
$$n=3k+2=5l+3=7m+2;$$
čia *k*, *l* ir *m* – kurie nors natūralieji skaičiai.

Iš lygybės $3k+2=7m+2$ išplaukia, kad $3k=7m$. Todėl skaičius *k* turi dalytis iš 7, o skaičius *m* turi dalytis iš 3. Tegu $m=3p$ ir $k=7p$; $p\in\mathbf{N}$.

Taigi $n=21p+2=5l+3$. Iš čia gauname:
$$21p=5l+1 \Rightarrow 5l=21p-1 \Rightarrow l=\frac{21p-1}{5}=4p+\frac{p-1}{5}.$$
Kadangi *l* yra natūralusis skaičius, tai mažiausia *p* reikšmė yra 1.
Vadinasi, $n=21\cdot 1+2=23$.
Ats.: 23.

6. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a, b, c), kuriems esant $a=b^2+c^2$, $b=c^2+a^2$, $c=a^2+b^2$.

Sprendimas. Iš pirmos lygybės atėmę antrą lygybę, gauname:
$$a-b=b^2-a^2,$$
$$a-b=(b-a)(b+a),$$
$$a-b-(b-a)(b+a)=0,$$
$$(a-b)(1+a+b)=0.$$

Kadangi $a\geq 0$, $b\geq 0$ ir $c\geq 0$, pastaroji lygybė galioja tik kai $b=a$. Todėl $a=a^2+c^2$ ir $c=a^2+a^2$.

Spręsdami sistemą
$$\begin{cases} a=a^2+c^2 \\ c=2a^2, \end{cases}$$
gauname:
$$\begin{cases} a=a^2+4a^4, \\ c=2a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a-4a^3)=0, \\ c=2a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \text{ arba } 1-a-4a^3=0, \\ c=2a^2 \end{cases} \Rightarrow a=c=0 \text{ arba } \begin{cases} 4a^3+a-1=0, \\ c=2a^2. \end{cases}$$
Lygtį $4a^3+a-1=0$ galima spręsti taip:
$$((2a)^3-1)-(4a^3-a)=0,$$
$$(2a-1)(4a^2+2a+1)-a(4a^2-1)=0,$$
$$(2a-1)(4a^2+2a+1)-a(2a-1)(2a+1)=0,$$
$$(2a-1)(2a^2+a+1)=0,$$
$$2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Tada $b=\frac{1}{2}$ ir $c=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Gauname du trejetus: $(0;0;0)$ ir $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ats.: $(0;0;0)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

7. Išspręskite lygtį su dviem nežinomaisiais

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0.$$

Sprendimas. Kadangi

$$x^2+4x\cos(xy)+4=(x+2\cos(xy))^2+4-4\cos^2(xy) \text{ ir } 4-4\cos^2(xy)\geq 0,$$

tai $x^2+4x\cos(xy)+4=0$ tik kai $x+2\cos(xy)=0$ ir $1-\cos^2(xy)=0$.

Toliau:

$$\begin{cases}1-\cos^2(xy)=0,\\ x+2\cos(xy)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(xy)=\pm1,\\ x\pm2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2y=\pm1,\\ x=\mp2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-2,\ y=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}, \text{ arba } x=2,\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ats.: $x=-2,\ y=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, arba $x=2,\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

8. Įrodykite, kad reiškinio

$$\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}-\frac{a+b}{ab}$$

reikšmė nepriklauso nuo a ir b reikšmių $(a\neq0, b\neq0)$.

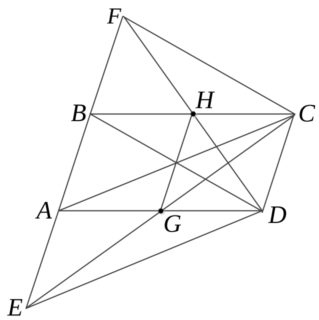
Įrodymas. Tegu a ir b yra bet kurie (nelygūs nuliui) realieji skaičiai. Tada

$$\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}-\frac{a+b}{ab}=\left(\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}\right)-\frac{a+b}{ab}=\frac{2ab+a+b}{ab}-\frac{a+b}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2.$$

Taigi skaičiavimo rezultatas bus visada toks pat – skaičius 2.

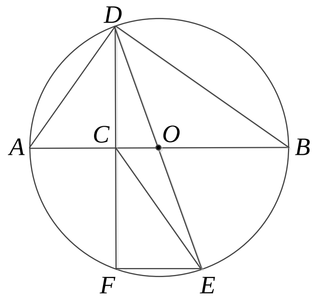
9. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė AB du kartus trumpesnė nei kraštinė AD. Kraštinės AB tęsiniuose nuo taškų A ir B atidėtos atkarpos $AE=BF=AB$. Raskite kampą tarp tiesių EC ir DF.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė EC lygiagretainio kraštinę AD kerta taške G, o tiesė DF kraštinę BC kerta taške H. Kadangi atkarpos AE ir CD yra lygios ir lygiagrečios, tai keturkampis $AEDC$ yra lygiagretainis. Taigi jo įstrižainės AD ir EC susikerta taške G, kuris jas dalija pusiau, t. y. $GD=\frac{1}{2}AD=DC$. Analogiškai atkarpos BF ir DC yra lygios ir lygiagrečios, taigi keturkampis $BFCD$ irgi lygiagretainis, taškas H yra jo įstrižainių sankirtos taškas, todėl $HC=\frac{1}{2}BC=CD$. Taigi keturkampis $DCHG$ yra rombas, kurio įstrižainės yra statmenos. Belieka pastebėti, kad įstrižainės CG ir HD yra tiesėse EC ir DF. Taigi ieškomas kampas lygus 90°.



Ats.: 90°.

10. Atkarpa *AB* yra apskritimo skersmuo, taškas *C* ją dalija santykiu $AC : CB = 1:2$. Iš taško *C* iškeltas statmuo skersmeniui *AB*, kuris kerta apskritimą taške *D*, atkarpa *DE* yra apskritimo skersmuo. Raskite trikampio *DEC* plotą, jei trikampio *ABD* plotas lygus 60.



Sprendimas. Sakykime, kad taškas *O* yra apskritimo centras, o taškas *F* yra kitas statmens *CD* ir apskritimo sankirtos taškas. Kadangi atkarpa *DE* yra apskritimo skersmuo, tai $EF \perp DF$. Taigi atkarpa *EF* yra trikampio *DEC* aukštinė. Todėl jo plotas yra $S = \frac{1}{2} DC \cdot EF$. Atkarpa *CO* yra trikampio *DEF* vidurinė linija, todėl $EF = 2CO$. Iš sąlygos $AC = \frac{1}{3} AB$ išplaukia, kad $CO = AO - AC = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{3} AB = \frac{1}{6} AB$. Vadinasi, $EF = \frac{1}{3} AB$. Kadangi trikampio *ABD* plotas yra $\frac{1}{2} AB \cdot CD = 60$, tai $CD = \frac{2 \cdot 60}{AB} = \frac{120}{AB}$. Taigi trikampio *DEC* plotas yra

$$S = \frac{1}{2} DC \cdot EF = \frac{120}{AB} \cdot \frac{AB}{6} = 20.$$

Ats.: 20.