

**TREČIOJI VILNIAUS UNIVERSITETO  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO  
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2018 m. kovo 17 d.

**IX klasė**

1. Raskite neneigiamą skaičiaus  $x$  reikšmę, su kuria reiškinių

$$x^3 - x^2 - 2\sqrt{x}$$

reikšmė yra mažiausia galima.

2. Saloje gyvena tik teisuoliai, kurie visada sako tik tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Į salą atvyko policininkas ir apklausė salos gyventojus. Kiekvieno gyventoją jis paklausė apie lygiai vieną kitą salos gyventoją, ar tas yra teisuolis, ar melagis. Apie kiekvieną salos gyventoją klausta lygiai vieną kartą. Kiekvienas gyventojas atsakė į klausimą, žinodamas teisingą atsakymą. Po apklausos visi tie, ką gyventojai nurodė esant melagiais, turėjo palikti salą. Išvaryta tiek žmonių, kiek saloje iš tikrųjų buvo melagių. Saloje melagių liko 3 kartus daugiau nei teisuolių. Koks teisuolių ir melagių santykis buvo saloje, prieš pasirodant policininkui?
3. Kvadrato  $ABCD$  viršūnė  $C$  priklauso tiesei, einančiai per rombo  $BDEF$  viršūnes  $E$  ir  $F$  (taškas  $F$  yra tarp taškų  $E$  ir  $C$ ). Raskite kampą  $CBF$ .
4. Natūralusis skaičius  $M = 3N$  turi tiek pat skaitmenų, kaip ir natūralusis skaičius  $N > 10$ . Norint gauti skaičių  $M$ , reikia padidinti kiekvieną iš skaičiaus  $N$  skaitmenų: prie vieno skaitmens pridėti 2, o prie likusių skaitmenų pridėti po nelyginį natūralųjį skaičių (nebūtinai po tą patį). Raskite visas galimas skaičiaus  $N$  paskutinio skaitmens reikšmes.

**TREČIOJI VILNIAUS UNIVERSITETO  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO  
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2018 m. kovo 17 d.

**X klasė**

1. Raskite neneigiamą skaičiaus  $x$  reikšmę, su kuria reiškinių

$$x^3 - x^2 - 2\sqrt{x}$$

reikšmė yra mažiausia galima.

2. Saloje gyvena tik teisuoliai, kurie visada sako tik tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Į salą atvyko policininkas ir apklausė salos gyventojus. Kiekvieno gyventoją jis paklausė apie lygiai vieną kitą salos gyventoją, ar tas yra teisuolis, ar melagis. Apie kiekvieną salos gyventoją klausta lygiai vieną kartą. Kiekvienas gyventojas atsakė į klausimą, žinodamas teisingą atsakymą. Po apklausos visi tie, ką gyventojai nurodė esant melagiais, turėjo palikti salą. Išvaryta tiek žmonių, kiek saloje iš tikrųjų buvo melagių. Saloje melagių liko 3 kartus daugiau nei teisuolių. Koks teisuolių ir melagių santykis buvo saloje, prieš pasirodant policininkui?
3. Stačiojo trikampio  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) išorėje pažymėtas toks taškas  $P$ , kad taškai  $C$  ir  $P$  yra vienoje pusėje nuo tiesės  $AB$ , o atkarpos  $AB$  ir  $PB$  statmenos ir lygios. Tiesėje  $PC$  pažymėtas toks taškas  $D$ , kad tiesės  $PC$  ir  $AD$  yra statmenos, o tiesėje  $AD$  pažymėtas toks taškas  $E$ , kad tiesės  $BC$  ir  $BE$  yra statmenos. Raskite kampą  $BCE$ .
4. Skaičiaus  $n > 1$  visų teigiamų daliklių (įskaitant 1 ir  $n$ ) sandauga lygi  $n^3$ . Nurodykite visas galimas skaičiaus  $n$  reikšmes, užrašydami, koks gali būti skaičiaus  $n$  skaidinys pirminiais daugikliais.

**TREČIOJI VILNIAUS UNIVERSITETO  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO  
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2018 m. kovo 17 d.

**XI ir XII klasės**

1. Teigiami skaičiai  $x_1, x_2, x_3, x_4$  tenkina lygybę  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ . Įrodykite nelygybę

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_3x_4} + \frac{x_3^3}{x_3^2 + x_4x_1} + \frac{x_4^3}{x_4^2 + x_1x_2} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Į lentelės  $5 \times n$  langelius įrašyta po vieną skaičių, lygų 0, 1 arba 2. Skaičių suma kiekvienoje iš 5 eilučių yra tokia pati, o skaičių sumos stulpeliuose, kurių yra  $n$ , visos skirtingos. Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus  $n$  reikšmę.
3. Smailiojo trikampio  $ABC$  aukštinės kertasi taške  $H$ . Taškas  $M$  dalija kraštinę  $BC$  pusiau. Atkarpoje  $AM$  pažymėtas toks taškas  $P$ , kad atkarpos  $AM$  ir  $HP$  statmenos. Įrodykite, kad

$$MA \cdot MP = MB^2.$$

4. Natūralieji skaičiai  $p, x, y$  tenkina lygtis:

$$p + 1 = 2x^2, \quad p^2 + 1 = 2y^2.$$

Nustatykite visas galimas skaičiaus  $p$  reikšmes, jei žinoma, kad šis skaičius pirminis.