2018 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

67-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Kuršėnai, 2018 04 20

1 (9-10 klasės). Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x = 3z + 2xy + y, \\ 2x + y + 3z + 6xz = 0, \\ 3z = 2x + y + 3yz. \end{cases}$$

Sprendimas. Pažymėję $X = 2x$, $Y = -y$ ir $Z = 3z$, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} XY = Z - X - Y, \\ XZ = Y - X - Z, \\ YZ = X - Y - Z. \end{cases}$$

Atėmę iš pirmosios lygties antrąją, gauname $X(Y-Z) = -2(Y-Z)$. Vadinasi, $Y = Z$ arba $X = -2$. Išnagrinėsime abu atvejus.

Tegul $Y = Z$. Iš antrosios lygties gauname $XY = -X$, todėl $X = 0$ arba $Y = -1$. Nagrinėkime atvejį $X = 0$. Kadangi $Y = Z$, iš trečiosios lygties išplaukia, kad $Y^2 = -2Y$, taigi $Y = Z = -2$ arba $Y = Z = 0$. Abu sprendiniai $(X, Y, Z) = (0, -2, -2)$ ir $(0, 0, 0)$ tenkina lygčių sistemą. Kadangi $(x, y, z) = (\frac{X}{2}, -Y, \frac{Z}{3})$, tai duotosios lygčių sistemos atitinkami sprendiniai yra $(0, 2, -\frac{2}{3})$ ir $(0, 0, 0)$. Kitu atveju, kai $Y = -1$ ir $Z = Y = -1$, iš trečiosios lygties gauname $1 = X + 2$, taigi $X = -1$. Akivaizdu, kad sprendinys $(X, Y, Z) = (-1, -1, -1)$ tenkina lygčių sistemą. Atitinkamas duotosios lygčių sistemos sprendinys (x, y, z) yra $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3})$.

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

Belieka išnagrinėti atvejį $X = -2$. Iš pirmosios lygties išplaukia lygybė $Y + Z = -2$, o tuomet iš trečiosios –

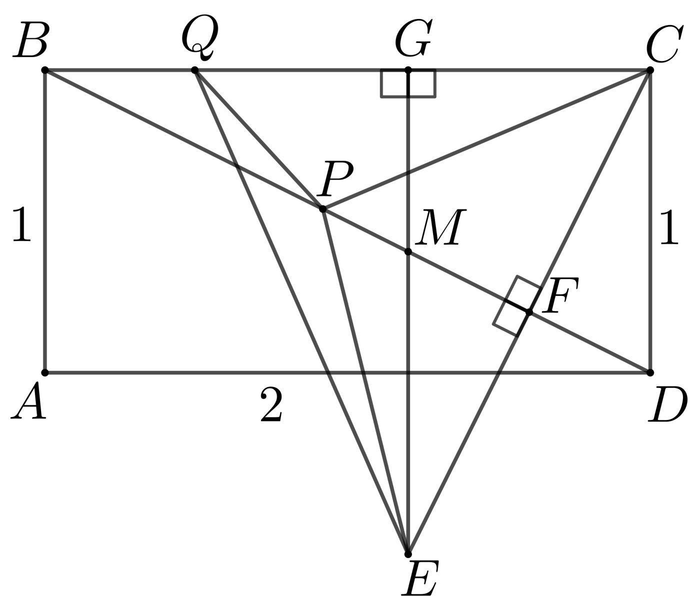
$$YZ = -2 - Y - Z = -2 + 2 = 0.$$

Vadinasi, $Y = 0$ arba $Z = 0$ ir atitinkamai $Z = -2 - Y = -2$ arba $Y = -2$. Abu sprendiniai $(X, Y, Z) = (-2, 0, -2)$ ir $(-2, -2, 0)$ tenkina lygčių sistemą. Juos atitinkantys duotosios lygčių sistemos sprendiniai yra $(-1, 0, -\frac{2}{3})$ ir $(-1, 2, 0)$.

Atsakymas: $(x, y, z) = (0, 0, 0), (0, 2, -\frac{2}{3}), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}), (-1, 0, -\frac{2}{3}), (-1, 2, 0)$.

2 (9-12 klasės). Duotas stačiakampis $ABCD$, $AB = 1$, $BC = 2$. Įstrižainėje BD pasirenkame tašką P, o kraštinėje BC – tašką Q. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti suma $CP + PQ$?

I sprendimas. Tegul E yra taškas, simetriškas taškui C tiesės BD atžvilgiu, G – statmens iš taško E į tiesę BC pagrindas, o F ir M – atitinkamai tiesių BD ir EC bei BD ir EG susikirtimo taškai.



Tada CF yra trikampio BCD aukštinė ir $CF = FE$. Be to, $CP = EP$, nes PF – trikampio EPC aukštinė ir pusiaukraštinė, taigi ir pusiaukampinė. Vadinasi,

$$CP + PQ = EP + PQ \geqslant EQ \geqslant EG.$$

Be to, parinkus taškus $P = M$ ir $Q = G$, čia galioja lygybės, todėl reikšmė EG yra įgyjama. Belieka ją suskaičiuoti.

Pritaikome Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui BCD:

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Užrašę trikampio BCD plotą dviem būdais, gauname $BC \cdot CD = BD \cdot CF$, todėl $CF = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Vadinasi,

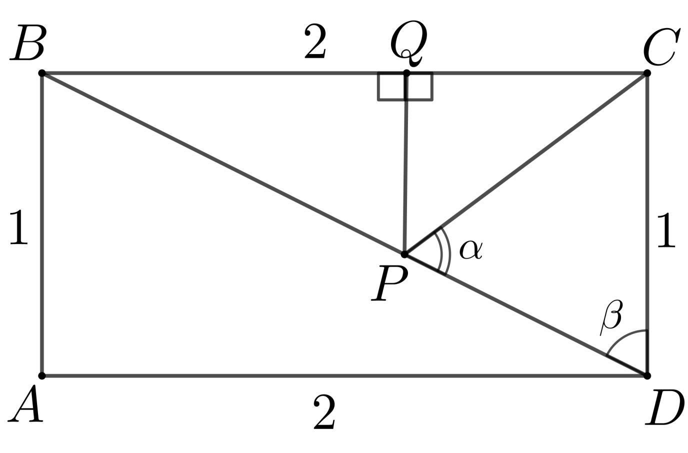
$$CE = CF + FE = 2CF = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Kadangi $\angle CEG = \angle ECD$, tai statieji trikampiai CFD ir EGC – panašūs. Remdamiesi $EG : CE = CF : CD$, apskaičiuojame EG:

$$EG = \frac{CE \cdot CF}{CD} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

Atsakymas: $\frac{8}{5}$.

II sprendimas. Tarkime, kad P – bet kuris atkarpos BD taškas. Akivaizdu, kad suma $CP + PQ$ bus mažiausia, kai Q yra iš taško P į tiesę BC nuleisto statmens pagrindas. Pažymėkime $\alpha = \angle CPD$ ir $\beta = \angle BDC$. Taškui P slenkant atkarpa BD nuo taško B iki taško D kampas $\angle PCD$ mažės nuo $90°$ iki $0°$. Vadinasi, $\alpha = 180° - \angle PCD - \beta$ didės nuo $90° - \beta$ iki $180° - \beta$.



Aišku, kad

$$CP + PQ = CP + CP\cos(\angle CPQ) = CP(1 + \cos(180° - \alpha - \beta)) =$$
$$= CP(1 - \cos(\alpha + \beta)).$$

Pritaikę sinusų teoremą trikampiui CPD, gauname $CD : \sin\alpha = CP : \sin\beta$, taigi $CP = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Belieka nustatyti mažiausią funkcijos

$$f(\alpha) = \frac{(1-\cos(\alpha+\beta))\sin\beta}{\sin\alpha}$$

reikšmę, kai $90^\circ - \beta \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ - \beta$. Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{(1-\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\sin\beta}{\sin\alpha} = \\ &= \frac{(1-\cos(\alpha-\beta))\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{(2\sin\alpha\sin\beta)\sin\beta}{\sin\alpha} = \\ &= 2(\sin\beta)^2 + \frac{(1-\cos(\alpha-\beta))\sin\beta}{\sin\alpha} \geqslant 2(\sin\beta)^2, \end{aligned}$$

nes $\sin\beta > 0$, $\sin\alpha > 0$ ir $1-\cos(\alpha-\beta) \geqslant 0$.

Lygybė $f(\alpha) = 2(\sin\beta)^2$ galioja, kai $\cos(\alpha-\beta) = 1$. Kadangi $45^\circ < \beta < 90^\circ$ ir $90^\circ - 2\beta \leqslant \alpha - \beta \leqslant 180^\circ - 2\beta$, tai pastaroji lygybė galioja tada ir tik tada, kai $\alpha = \beta$. (Matome, jog tada trikampis PCD – lygiašonis, $PC = CD = 1$.)

Įrodėme, kad mažiausia įmanoma sumos $CP + PQ$ reikšmė yra lygi $2(\sin\beta)^2$. Iš stačiojo trikampio BCD gauname $\operatorname{tg}\beta = BC : CD = 2$. Iš čia išplaukia, kad

$$2(\sin\beta)^2 = \frac{2(\operatorname{tg}\beta)^2}{1+(\operatorname{tg}\beta)^2} = \frac{2\cdot 2^2}{1+2^2} = \frac{8}{5}$$

ir yra ta mažiausioji $CP + PQ$ reikšmė.

Atsakymas: $\frac{8}{5}$.

3 (9-10 klasės). Reikia nuspalvinti kiekvieną aibės $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ skaičių. Skaičius 4 jau nuspalvintas raudonai. Jūs galite spalvinti kiekvieną iš likusių skaičių mėlynai arba raudonai, bet privalote laikytis dviejų taisyklių:

i) jeigu skaičiai x ir y nuspalvinti skirtingai ir $x + y \leqslant 8$, tai skaičius $x + y$ turi būti nuspalvintas mėlynai;

ii) jeigu skaičiai x ir y nuspalvinti skirtingai ir $x \cdot y \leqslant 8$, tai skaičius $x \cdot y$ turi būti nuspalvintas raudonai.

a) Nurodykite bent du aibės A spalvinius.

b) Raskite visus aibės A spalvinius.

Sprendimas. Akivaizdu, kad vieną spalvinį gausime visus skaičius nuspalvindami raudonai. Tuomet taisyklės i) ir ii) niekam netrukdo, nes skirtingai nuspalvintų skaičių tiesiog nėra. Tokį spalvinį žymėsime R,R,R,R,R,R,R,R. (Raidę R visada naudosime raudonai spalvai žymėti, o raidę M – mėlynai.)

Tarkime, kad spalvinyje yra bent vienas mėlynas skaičius. Įrodysime, kad skaičius 1 tokiame spalvinyje yra nuspalvintas mėlynai. Tarkime priešingai, kad skaičius 1 yra nuspalvintas raudonai, o koks nors skaičius x $(2 \leqslant x \leqslant 8)$ – mėlynai. Tada, pagal ii) taisyklę, tas pats skaičius $x = 1 \cdot x$ yra nuspalvintas raudonai, prieštara.

Toliau nagrinėjame atvejį M,2,3,R,5,6,7,8. Pagal i) taisyklę, skaičius 3 turi būti nuspalvintas mėlynai $(1 + 3 = 4)$, o skaičius 5 taip pat mėlynai (kadangi $1 + 4 = 5$). Dabar iš lygybės $3 + 4 = 7$ ir i) taisyklės išplaukia, kad skaičius 7 turi būti nuspalvintas mėlynai. Vadinasi, visi spalviniai (su bent vienu mėlynu skaičiumi) gali būti tik tokie: M,2,M,R,M,6,M,8.

Tarkime, kad skaičius 2 nuspalvintas mėlynai. Tada iš $2 \cdot 4 = 8$ ir ii) taisyklės išplaukia, kad skaičius 8 yra nuspalvintas raudonai. Remiantis i) taisykle ir lygybe $2+6 = 8$, matome, kad skaičius 6 turi būti nuspalvintas mėlynai. Nesunku įsitikinti, kad M,M,M,R,M,M,M,R tenkina abi taisykles, taigi yra spalvinys.

Nagrinėkime atvejį, kai skaičius 2 yra nuspalvintas raudonai, taigi nagrinėjamas spalvinys yra toks: M,R,M,R,M,6,M,8. Remiantis lygybe $2 \cdot 3 = 6$ ir ii) taisykle, gauname, kad skaičius 6 nuspalvintas raudonai. Nesunku įsitikinti, kad abu skaičiaus 8 spalvinimo variantai R ir M tinka, nes abu variantai M,R,M,R,M,R,M,R ir M,R,M,R,M,R,M,M neprieštarauja taisyklėms i) ir ii), taigi jie taip pat yra spalviniai.

Atsakymas: R,R,R,R,R,R,R,R M,M,M,R,M,M,M,R M,R,M,R,M,R,M,R ir M,R,M,R,M,R,M,M.

4 (9-10 klasės). Raskite visas sveikųjų skaičių poras (x, y), tenkinančias lygybę

$$x^3 + 3x^2y = 4y^3 + 100.$$

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} 100 &= x^3 + 3x^2y - 4y^3 = (x^3 - y^3) + (3x^2y - 3y^3) = \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3y(x - y)(x + y) = \\ &= (x - y)(x^2 + 4xy + 4y^2) = (x - y)(x + 2y)^2. \end{aligned}$$

Kadangi sveikojo skaičiaus kvadratas $(x+2y)^2$ dalija 100, tai jis gali būti lygus tik $1, 4, 25$ arba 100. Vadinasi, $x+2y = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10$ ir atitinkamai $x-y = 100, 25, 4, 1$.

Išnagrinėsime visus aštuonis atvejus. Jei $x + 2y = 1$, tai $x - y = 100$. Atėmę antrąją lygtį iš pirmosios, gauname $3y = -99$. Vadinasi, $y = -33$ ir $x = 100 + y = 67$. Akivaizdu, kad pora $(x, y) = (67, -33)$ tenkina duotąją lygybę.

Jei $x + 2y = -1$, tai $x - y = 100$. Tuomet, atėmę antrąją lygtį iš pirmosios, gauname $3y = -101$. Tai neįmanoma, nes $y \in \mathbb{Z}$.

Jei $x + 2y = 2$, tai $x - y = 25$. Gauname $3y = -23$, taigi $y \notin \mathbb{Z}$. Jei $x + 2y = -2$, tai $x - y = 25$. Nesunku įsitikinti, jog iš čia gaunama pora $(x, y) = (16, -9)$ tenkina duotąją lygybę.

Jei $x+2y = \pm5$, tai $x-y = 4$. Vienintelė iš šių dviejų lygčių sistemų gaunama sveikųjų skaičių pora yra $(x, y) = (1, -3)$. Ji tenkina duotąją lygybę.

Analogiškai, išnagrinėję dvi lygčių sistemas $x+2y = \pm10$, $x-y = 1$, gausime dar vieną tinkamą sveikųjų skaičių porą $(x, y) = (4, 3)$.

Atsakymas: $(x, y) = (1, -3), (4, 3), (16, -9)$ ir $(67, -33)$.

5 (11-12 klasės). Realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ tenkina tokias sąlygas:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{100} \geqslant 0,$$

$$a_1 + a_2 \leqslant 100,$$

$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leqslant 100.$$

a) Kam lygi didžiausia galima $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$ reikšmė?
b) Raskite visus skaičių rinkinius $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, su kuriais ji įgyjama.

Sprendimas. Pažymėkime $a_2 = x$. Tada $x \leqslant a_1 \leqslant 100-x$ (vadinasi, $0 \leqslant x \leqslant 50$) ir $a_i \leqslant x$ su kiekvienu $i = 3, 4, \ldots, 100$. Naudodamiesi nelygybėmis $a_i^2 \leqslant xa_i$ su kiekvienu $i = 3, 4, \ldots, 100$, gauname

$$a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 \leqslant x(a_3 + a_4 + \cdots + a_{100}) \leqslant 100x.$$

Be to,

$$a_1^2 + a_2^2 \leqslant (100 - x)^2 + x^2 = 10000 + 2x^2 - 200x.$$

Vadinasi,

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 \leqslant 10000 + 2x^2 - 200x + 100x =$$
$$= 2x^2 - 100x + 10000 = 10000 - 2x(50 - x).$$

Kadangi $0 \leqslant x \leqslant 50$, tai $2x(50 - x) \geqslant 0$. Vadinasi, $S \leqslant 10000$.

Reikšmę 10000 kvadratų suma S įgyja tada ir tik tada, kai $2x(50 - x) = 0$, $a_1 = 100 - x$, $a_i^2 = xa_i$ (čia $i = 3, \ldots, 100$) ir $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$ (ši sąlyga reikalinga tik tuo atveju, kai $x \neq 0$).

Turime du atvejus: $x = 0$ ir $x = 50$. Pirmuoju atveju, $x = 0$, gauname $a_1 = 100$, $a_2 = x = 0$ ir $a_3 = \cdots = a_{100} = 0$. Matome, kad visos reikalingos lygybės galioja. (Lygybė $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$ čia nereikalinga, nes $x = 0$.) Vadinasi, reikšmę 10000 kvadratų suma S įgyti gali.

Antruoju atveju, $x = 50$, gauname $a_1 = a_2 = 50$, $a_i^2 = 50a_i$ $(i = 3, \ldots, 100)$ ir $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$. Vadinasi, $a_i \in \{0, 50\}$ su kiekvienu $i = 3, \ldots, 100$. Kadangi $a_3 \geqslant a_4 \geqslant \ldots \geqslant a_{100}$, kiekvienas iš šių skaičių yra lygus arba 50, arba 0, o jų visų suma yra lygi 100, tai vienintelis toks įmanomas rinkinys yra $a_3 = = a_4 = 50$, $a_5 = \cdots = a_{100} = 0$.

Atsakymas: a) 10000; b) $a_1 = 100$, $a_2 = \cdots = a_{100} = 0$ ir $a_1 = a_2 = a_3 = = a_4 = 50$, $a_5 = \cdots = a_{100} = 0$.

6 (11-12 klasės). Į kiekvieną lentelės 100×100 langelį įrašytas natūralusis skaičius. Bet kurių dviejų gretimuose langeliuose esančių skaičių skirtumas yra ne didesnis už 10. Įrodykite, kad bent šešiuose langeliuose įrašyti vienodi skaičiai. (*Gretimi* langeliai turi bendrą kraštinę.)

Sprendimas. Tegul m – mažiausias lentelėje įrašytas skaičius, o M – didžiausias. Iš bet kurio lentelės langelio į bet kurį kitą galima patekti per keletą kartų vis pereinant į gretimą langelį. Iš viso užteks padaryti ne daugiau kaip 99 tokius ėjimus vertikaliai ir ne daugiau kaip 99 – horizontaliai. Kadangi bet kurių dviejų gretimuose langeliuose esančių skaičių skirtumas neviršija 10, tai

$$M \leqslant m + 99 \cdot 10 + 99 \cdot 10 = m + 1980.$$

Vadinasi, lentelėje yra ne daugiau kaip 1981 skirtingas skaičius. Jei kiekvienas iš jų lentelėje būtų įrašytas mažiau kaip 6 kartus, tai iš viso lentelėje būtų ne daugiau kaip $1981 \cdot 5 = 9905$ skaičiai, o jų yra $100 \cdot 100 = 10000$, prieštara.

7 (11-12 klasės). Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (m,n), su kuriomis $m^{2018}+n$ dalijasi iš mn.

Sprendimas. Jei $m=1$, tai $1+n$ dalijasi iš n. Vadinasi, $n=1$. Akivaizdu, kad pora $(m,n)=(1,1)$ tenkina uždavinio sąlygą.

Tarkime, kad $m>1$. Kadangi $m|m^{2018}$, tai $m|n$. Tegul k yra didžiausias natūralusis skaičius, su kuriuo m^k dalija n, t. y. $n=m^k r$, čia $r\in\mathbb{N}$ nesidalija iš m. Kadangi m^{k+1} dalija mn, tai m^{k+1} dalija ir $m^{2018}+n=m^{2018}+m^k r$. Iš $m^k|m^{2018}$ (ir $m>1$) išplaukia, kad $k\leqslant 2018$. Kita vertus, jei $k<2018$, tai m^{k+1} dalija m^{2018}, bet nedalija $m^k r$, todėl nedalija ir $m^{2018}+m^k r$, prieštara. Vadinasi, $k=2018$, o $n=m^{2018}r$. Iš $mn=m^{2019}r$ ir $m^{2018}+n=m^{2018}(1+r)$ gauname, kad $mr|(1+r)$. Iš $r|(1+r)$ išplaukia, kad $r=1$. Taigi $m|2$. Be to, $m>1$, todėl $m=2$, o $n=m^{2018}r=2^{2018}$. Akivaizdu, kad pora $(m,n)=(2,2^{2018})$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $(m,n)=(1,1)$ ir $(2,2^{2018})$.