

67-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kuršėnai, 2018 04 20

9–10 klasės

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus  $(x, y, z)$ , tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x = 3z + 2xy + y, \\ 2x + y + 3z + 6xz = 0, \\ 3z = 2x + y + 3yz. \end{cases}$$

2. Duotas stačiakampis  $ABCD$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ . Įstrižainėje  $BD$  pasirenkame tašką  $P$ , o kraštinėje  $BC$  – tašką  $Q$ . Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti suma  $CP + PQ$ ?
3. Reikia nuspalvinti kiekvieną aibės  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  skaičių. Skaičius 4 jau nuspalvintas raudonai. Jūs galite spalvinti kiekvieną iš likusių skaičių mėlynai arba raudonai, bet privalote laikytis dviejų taisyklių:
- i) jeigu skaičiai  $x$  ir  $y$  nuspalvinti skirtingai ir  $x + y \leq 8$ , tai skaičius  $x + y$  turi būti nuspalvintas mėlynai;
  - ii) jeigu skaičiai  $x$  ir  $y$  nuspalvinti skirtingai ir  $x \cdot y \leq 8$ , tai skaičius  $x \cdot y$  turi būti nuspalvintas raudonai.
- a) Nurodykite bent du aibės  $A$  spalvinius.
  - b) Raskite visus aibės  $A$  spalvinius.
4. Raskite visas sveikųjų skaičių poras  $(x, y)$ , tenkinančias lygybę

$$x^3 + 3x^2y = 4y^3 + 100.$$

## 11–12 klasės

1. Realieji skaičiai  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  tenkina tokias sąlygas:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 \leq 100,$$

$$a_3 + a_4 + \dots + a_{100} \leq 100.$$

- a) Kam lygi didžiausia galima  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$  reikšmė?  
b) Raskite visus skaičių rinkinius  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ , su kuriais ji įgyjama.
2. Duotas stačiakampis  $ABCD$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ . Įstrižainėje  $BD$  pasirenkame tašką  $P$ , o kraštinėje  $BC$  – tašką  $Q$ . Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti suma  $CP + PQ$ ?
3. Į kiekvieną lentelės  $100 \times 100$  langelių įrašytas natūralusis skaičius. Bet kurių dviejų gretimuose langeliuose esančių skaičių skirtumas yra ne didesnis už 10. Įrodykite, kad bent šešiuose langeliuose įrašyti vienodi skaičiai. (*Gretimi* langeliai turi bendrą kraštinę.)
4. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras  $(m, n)$ , su kuriomis  $m^{2018} + n$  dalijasi iš  $mn$ .