Atranka į 2018 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2018 05 06

1. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis $ABCD$. Tiesių spinduliai AB ir DC kertasi taške K. Atkarpų AC ir CK vidurio taškai atitinkamai pažymėti M ir N. Taškai B, D, M, N priklauso vienam apskritimui. Raskite visas galimas $\angle ADC$ reikšmes.

2. Duoti du natūralieji skaičiai $n \geqslant m \geqslant 2$. Gitanas ir Saulius žaidžia tokį žaidimą. Gitanas turi pasirinkti m skirtingų skaičių iš aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jei Saulius gali iš tų m skaičių pasirinkti tokius du skaičius a ir b, kad $a < b \leqslant 2a$, tai jis ir laimi žaidimą. Priešingu atveju, jei tokios poros (a, b) nėra, žaidimą laimi Gitanas.
   a) Įrodykite, kad Gitanas gali laimėti žaidimą, kai $(n, m) = (66, 6)$.
   b) Įrodykite, kad Saulius gali laimėti žaidimą, kaip bežaistų Gitanas, kai $(n, m) = (2018, 11)$.
   c) Kiekvienam $m \geqslant 2$ raskite visas n reikšmes, su kuriomis Saulius gali laimėti žaidimą, kad ir kaip bežaistų Gitanas.

3. Natūralųjį skaičių n vadinkime *sėkmingu*, jei egzistuoja be galo daug teigiamų racionaliųjų skaičių rinkinių $(a_1, \ldots, a_n)$, su kuriais abu skaičiai $a_1 + \cdots + a_n$ ir $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ yra natūralieji. (Pavyzdžiui, skaičius $n = 1$ nėra sėkmingas, nes a_1 ir $\frac{1}{a_1}$ abu yra natūralieji tada ir tik tada, kai $a_1 = 1$. Skaičiai $a_1, \ldots, a_n$ nebūtinai skirtingi.)
   a) Įrodykite, kad skaičius $n = 2$ nėra sėkmingas.
   b) Įrodykite, kad kiekvienas natūralusis skaičius $n \geqslant 3$ yra sėkmingas.

Atranka į 2018 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Antroji diena, 2018 05 07

4. Kiekvienam natūraliajam nelyginiam n nustatykite, koks yra skaičiaus
$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n + 6}$$
vienetų skaitmuo. (Pavyzdžiui, skaičiaus 27,83 vienetų skaitmuo yra 7, o skaičiaus $\pi = 3{,}14\ldots$ vienetų skaitmuo yra 3.)

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas vidurio taškas M. Iš taško B į tiesę CM nuleistas statmuo kerta tiesę CM taške P. Taškas N dalija atkarpą CP pusiau. Kampo DAN pusiaukampinė ir tiesė DP kertasi taške Q. Įrodykite, kad keturkampis $BMQN$ yra lygiagretainis.

6. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurioms lygybė
$$(x+y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$$
galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$.
(Čia $\mathbb{R}^+$ žymi visų realiųjų teigiamų skaičių aibę.)