

**XXXIII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI**

**Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2018-09-29**

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{-x^2 - 2x} + \sqrt{8 - x^2 - 2x} = 4$.
2. Duota, kad trys poromis skirtingi realieji skaičiai x, y, z tenkina lygybes

$$x(y + z) + z = y(z + x) + x = z(x + y) + y.$$

Raskite visas galimas sandaugos xyz reikšmes.

3. Duota, kad $x, y, z > 0$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

4. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

teisinga su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} = 1, \\ y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = 1, \\ z^3 + 2x^2 + \frac{1}{4y} = 1 \end{cases}$$

visus realiuosius teigiamus sprendinius (x, y, z) .

6. Natūralųjį skaičių N vadinsime smagiu, jei prie jo iš dešinės prirašius bet kuri nenulinį skaitmenį a , gautasis naujas skaičius visada dalijasi iš a .

- a) Raskite bent vieną smagų skaičių.
- b) Raskite mažiausią smagų skaičių.

7. Trys natūralieji skaičiai a, b, c tenkina lygtį $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių ab, bc, ca yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

8. Sveikieji skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ tenkina sąlygas

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2 > 0.$$

Įrodykite, kad natūralusis skaičius n yra lyginis.

9. Aušra vieną po kito užrašė 8 pirminius skaičius, mažesnius už 200 (nebūtinai skirtingus). Tada Aušrinė prie pirmojo Aušros skaičiaus pridėjo 1, prie antrojo pridėjo 2, prie trečiojo pridėjo 3, ..., prie aštuntojo pridėjo 8. Aurora Aušrinės gautus 8 skaičius sudaugino. Iš kokio didžiausio dvejeta laipsnio 2^n , kur skaičius n natūralusis, gali dalytis Auroros gautas skaičius?

10. Lentoje užrašytas skaičius 2018. Rytis ir Vakarė žaidžia žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus; pradeda Rytis. Ėjimo metu Rytis turi prie lentoje užrašyto skaičiaus iš dešinės prirašyti vieną bet kokį skaitmenį. Vakarė savo ėjimo metu turi prie lentoje užrašyto skaičiaus iš dešinės prirašyti du bet kokius skaitmenis. Jei po kurio nors Vakarės ėjimo gautasis skaičius dalijasi iš 112, tai Vakarė laimi. Jei lentoje užrašytas skaičius turi bent 2018 skaitmenų, o Vakarė dar nelaimėjo, tai laimi Rytis. Kuris iš žaidėjų turi pergalės strategiją?
11. Joana ir Jonas turi užpildyti 3×3 lentelę, įrašydami visus skaičius $1, 2, \dots, 9$, po vieną skaičių į langelį. Pradžioje Joana bet kaip užpildo bet kuriuos 6 langelius, o tada Jonas – likusius tris. Joana nori, kad trys eilučių skaičių sandaugos kokia nors tvarka būtų lygios trimis stulpelių skaičių sandaugoms. Ar ji gali taip įrašyti savo 6 skaičius, kad Jonas negalėtų jai sutrukdyti?
12. Išbraukiant kai kuriuos natūraliojo skaičiaus n skaitmenis (ir nekeičiant likusių skaitmenų tvarkos), galima gauti bet kurį iš skaičių $1, 2, \dots, 31$. Raskite mažiausią galimą skaičiaus n reikšmę.
13. Į vieną eilę sustatytos 100 dėžių. Jos iš eilės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 100. Kiekvienoje dėžėje yra daugiausiai 10 rutulių. Bet kurių gretimų dėžių rutulių skaičiai skiriasi per 1. Dėžėse 1, 4, 7, \dots , 97, 100 yra iš viso 301 rutulys. Kiek daugiausiai rutulių gali būti visose dėžėse?
14. Lentoje užrašyti 8 nuliai. Vienu ėjimu leidžiama nutrinti bet kuriuos keturis lentoje užrašytus skaičius a, b, c, d ir vietoj jų užrašyti skaičius $a + 1, b + 2, c + 3, d + 3$.
- Kiek mažiausiai ėjimų reikia atlikti, kad lentoje atsirastų 8 iš eilės einantys natūralieji skaičiai?
 - Ar galima padaryti, kad visi 8 skaičiai lentoje būtų lygūs 2018?
 - Ar galima padaryti, kad 8 skaičių lentoje sandauga būtų lygi 2145?
15. Šešių futbolo komandų turnyre bet kurios dvi komandos sužaidė po vieną kartą. Už pergalę vieneriose rungtynėse komanda gauna 3 taškus, už pralaimėjimą gauna 0 taškų, o už lygiąsias gauna 1 tašką. Galutiniai komandų rezultatai (6 skaičiai) sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra 2. Įrodykite, kad komanda, pagal taškus užėmusi 4-ąją vietą, laimėjo lygiai dvi rungtynes.
16. Sujungus keturias taisyklingojo dvylikakampio viršūnes, gautas kvadratas. Koks yra dvylikakampio ir kvadrato plotų santykis?
17. Trikampis ABC tenkina lygybes $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB = 12$. Kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir D , kad $AM = MB$ ir $CD = 3$. Atkarpos CM ir BD kertasi taške E . Kam lygus keturkampio $AMED$ plotas?
18. Popierinis rombas $ABCD$ tenkina lygybes $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4$ cm. Rombą perlenkus išilgai tiesios linijos, viršūnė B sutapo su kraštinės AD vidurio tašku H . Perlinkis padalijo rombą į penkiakampį ir trikampį su viršūne B . Raskite to trikampio kraštines.
19. Trys apskritimai, kurių spinduliai lygūs r_1, r_2, r_3 , liečia tiesę l atitinkamai taškuose A, B, C (taškas B yra tarp taškų A ir C). Be to, bet kurie du iš apskritimų liečia vienas kitą bei yra vienas kito išorėje. Įrodykite nelygybę

$$16(r_1 + r_2 + r_3) \geq 9(AB + BC + CA).$$

20. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD yra statmenos bei kertasi taške P . Apie $ABCD$ apibrėžtas apskritimas Γ , kurio centras O yra trikampio BPC viduje. Atkarpoje BO pažymėtas toks taškas H , kad $\angle BHP = 90^\circ$. Apskritimas ω , einantis per taškus P, H, D , kerta atkarpa PC taške $Q \neq P$. Įrodykite, kad $AP = CQ$.