XXXIII Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. -1.

   Pažymėkime $t = \sqrt{-x^2 - 2x}$. Gauname lygtį $t + \sqrt{8 + t^2} = 4$. Tada

   $$4 - t = \sqrt{8 + t^2}, \quad (4 - t)^2 = 8 + t^2, \quad 16 - 8t + t^2 = 8 + t^2$$

   ir $t = 1$. Todėl $-x^2 - 2x = t^2 = 1$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ ir $x = -1$. Gautasis sprendinys tenkina pradinę lygtį.

2. Ats. $xyz = -1$.

   Kadangi $x(y + z) + z = y(z + x) + x$, tai

   $$x - z = x(y + z) - y(z + x) = xy + xz - yz - xy = xz - yz = z(x - y).$$

   Vadinasi, $z(x-y) = -(z-x)$. Analogiškai gauname $x(y-z) = -(x-y)$ ir $y(z - x) = -(y - z)$. Sudauginkime tris pastarąsias lygybes:

   $$xyz(x - y)(y - z)(z - x) = -(x - y)(y - z)(z - x).$$

   Skaičiai x, y, z yra skirtingi, todėl $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$. Padaliję gautąją lygybę iš $(x - y)(y - z)(z - x)$, gauname, kad $xyz = -1$. (Ši reikšmė įgyjama: pvz., imkime $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, $z = -1$.)

3. Pertvarkykime duotąją nelygybę: padauginkime ją iš teigiamo skaičiaus $4(x+y)(y+z)(z+x)$, o tada atskliauskime ir suprastinkime gautuosius reiškinius. Taip gausime ekvivalenčią nelygybę:

   $$4x^2(y + z) + 4y^2(z + x) + 4z^2(x + y) \geqslant 3(x + y)(y + z)(z + x),$$

   $$4(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y) \geqslant$$
   $$\geqslant 3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y + 2xyz),$$
   $$x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y \geqslant 6xyz,$$

   Paskutinę nelygybę galima įrodyti suporavus kairės pusės narius ir pritaikius kiekvienai porai aritmetinio bei geometrinio vidurkių nelygybę:

   $$x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y =$$

$= (x^2y + z^2y) + (y^2z + x^2z) + (z^2x + y^2x) \geqslant 2\sqrt{x^2y \cdot z^2y} +$

$+2\sqrt{y^2z \cdot x^2z} + 2\sqrt{z^2x \cdot y^2x} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz.$

Įrodyta.

4. Ats. $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ ir $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

Į duotąją lygybę įrašykime $x = 0$ ir $y = 0$: $0 = f^2(0)$ ir $f(0) = 0$.

Dabar į duotąją lygybę įrašykime $y = -1$:

$$0 = xf(x) + f(x^2)f(-1), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Jei $f(-1) = 0$, tai $xf(x) = 0$ ir $f(x) = 0$ visiems $x \neq 0$. Gauname funkciją $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Tarkime, $f(-1) \neq 0$. Į (*) įrašykime $x = -1$ ir $x = 1$:

$$0 = (-1) \cdot f(-1) + f((-1)^2)f(-1) = f(-1)(-1 + f(1)),$$

$$0 = 1 \cdot f(1) + f(1^2)f(-1) = f(1)(1 + f(-1)).$$

Iš šių lygybių gauname $f(1) = 1$ ir $f(-1) = -1$. Dabar lygtį (*) galime perrašyti taip: $xf(x) = f(x^2)$.

Jei $f(x_0) = 0$ kokiam nors $x_0 \neq 0$, tai $f(x_0^2) = x_0 f(x_0) = 0$ ir pradinėje lygtyje imdami $x = x_0$ gauname, kad $x_0 f(x_0 + x_0 y) = 0$, kai $y \in \mathbb{R}$. Bet tada galime pasirinkti tokį y, kad $x_0 + x_0 y = -1$. Gauname $0 = = x_0 \cdot f(-1) = -x_0$ – prieštara. Vadinasi, $f(x) \neq 0$, kai $x \neq 0$.

Pradinėje lygybėje imkime $x = 1$: $f(1 + y) = 1 + f(y)$. Tada visiems x ir y turime $xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y) = xf(x) + xf(x)f(y) = = xf(x)(1 + f(y)) = xf(x)f(1 + y)$. Imkime bet kokį $x \neq 0$ ir $y = x - 1$:

$$xf(x^2) = xf(x+xy) = xf(x)f(1+y) = xf^2(x), \quad f^2(x) = f(x^2) = xf(x).$$

Vadinasi, $f(x) = x$, kai $x \neq 0$. Gauname funkciją $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Abi rastosios funkcijos tenkina uždavinio sąlygą.

5. Ats. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

Pirmasis sprendimas. Tarkime, kad (x, y, z) yra ieškomas sprendinys.

Tarkime, kad $z \geqslant x, y$. Tada $-z^3 \leqslant -x^3$ ir $-\frac{1}{4y} \leqslant -\frac{1}{4z}$, todėl

$$2x^2 = 1 - z^3 - \frac{1}{4y} \leqslant 1 - x^3 - \frac{1}{4z} = 2y^2, \quad x \leqslant y.$$

Jei bent viena iš nelygybių $x \leqslant y$ ir $y \leqslant z$ yra griežta, tai ir bent viena iš nelygybių $x^3 \leqslant y^3$ ir $2y^2 \leqslant 2z^2$ yra griežta. Tada

$$1 = x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} < y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = 1.$$

Gavome prieštarą. Vadinasi, $x = y = z$, o duotoji lygčių sistema su sąlyga, kad $x, y, z > 0$, suvedama į vieną lygtį

$$x^3 + 2x^2 + \frac{1}{4x} = 1.$$

Pervadinus x į y, y į z, o z į x pradinė lygčių sistema nepakinta, todėl likę atvejai $x \geqslant y, z$ ir $y \geqslant x, z$ analogiški jau išnagrinėtajam.

Gautąją lygtį padauginkime iš $4x \neq 0$ ir bandykime išskirti pilnąjį kvadratą, pridėdami ir atimdami trūkstamą narį:

$$4x^4 + 8x^3 - 4x + 1 = 0, \quad (2x^2)^2 + 1 - 2 \cdot 2x^2 + 4x^2 + 8x^3 - 4x = 0,$$

$$(2x^2 - 1)^2 + 4x(2x^2 - 1) + 4x^2 = 0, \quad (2x^2 - 1 + 2x)^2 = 0.$$

Gauname kvadratinę lygtį $2x^2 + 2x - 1 = 0$, kurios vienintelis teigiamas sprendinys yra $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Taigi, vienintelis pradinės sistemos sprendinys yra $(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$.

Antrasis sprendimas. Tarkime, kad (x, y, z) yra ieškomas sprendinys.

Sudėkime tris duotąsias lygtis. Gauname, kad $f(x) + f(y) + f(z) = 3$, kur $f(t) = t^3 + 2t^2 + \frac{1}{4t}$. Galime pastebėti (plg. su pirmuoju sprendimu), kad

$$4x(f(x) - 1) = 4x^4 + 8x^3 - 4x + 1 = (2x^2 - 1 + 2x)^2 \geqslant 0.$$

Todėl $f(x) \geqslant 1$. Analogiškai $f(y), f(z) \geqslant 1$. Kadangi $f(x) + f(y) + {}+ f(z) = 3 = 1 + 1 + 1$, tai $f(x) = f(y) = f(z) = 1$. Tada

$$(2x^2 - 1 + 2x)^2 = (2y^2 - 1 + 2y)^2 = (2z^2 - 1 + 2z)^2 = 0,$$

$$2x^2 - 1 + 2x = 0, \quad 2y^2 - 1 + 2y = 0, \quad 2z^2 - 1 + 2z = 0.$$

Išsprendę kvadratines lygtis ir atsižvelgę į $x, y, z > 0$, gauname $x = y = {}= z = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Šios reikšmės tenkina uždavinio sąlygą:

$$x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} = y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = z^3 + 2x^2 + \frac{1}{4y} = f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1.$$

6. Ats. a) Bet kuris skaičiaus 252 kartotinis, pvz., 756; b) 252.

Skaičius N yra smagus $\iff$

$\overline{Na} = 10N + a$ dalijasi iš a, kai $a = 1, 2, \ldots, 9$ $\iff$

$10N$ dalijasi iš $1, 2, \ldots, 9$ $\iff$

$10N$ dalijasi iš 7, 8 ir 9 (nes tada jis dalijasi ir iš skaičių 8 bei 9 daliklių 1, 2, 3, 4, ir iš skaičiaus $6 = 2 \cdot 3$, ir iš skaičiaus 10 daliklio 5) $\iff$

$10N$ dalijasi iš MBK(7, 8, 9)$= 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ $\iff$

$5N$ dalijasi iš 252 $\iff$

N dalijasi iš 252 (nes $\text{DBD}(5, 252) = 1$).

Mažiausias toks natūralusis skaičius yra $N = 252$.

7. Pertvarkykime lygtį:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = a^4bc + ab^4c + abc^4,$$
$$(a^3b^3 - a^4bc) + (b^3c^3 - abc^4) + (c^3a^3 - ab^4c) = 0,$$
$$a^3b(b^2 - ac) + bc^3(b^2 - ac) + ac(a^2c^2 - b^4) = 0,$$
$$a^3b(b^2 - ac) + bc^3(b^2 - ac) - ac(b^2 + ac)(b^2 - ac) = 0,$$
$$(b^2 - ac)(a^3b + bc^3 - ac(b^2 + ac)) = 0$$
$$(b^2 - ac)((a^3b - acb^2) + (bc^3 - a^2c^2)) = 0,$$
$$(b^2 - ac)(ab(a^2 - bc) + c^2(bc - a^2)) = 0,$$
$$(b^2 - ac)(a^2 - bc)(ab - c^2) = 0.$$

Todėl teisinga bent viena iš lygybių $ac = b^2$, $bc = a^2$, $ab = c^2$. Vadinasi, bent vienas iš skaičių ab, bc, ca yra tikslusis kvadratas.

Įrodyta.

8. Tarkime, kad skaičius n nelyginis.

Pažymėkime $z = x_1^2 + y_1^2$. Galime laikyti, kad nelyginis n ir skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yra tokie, kuriems z įgyja mažiausią galimą (natūraliąją) reikšmę. Tarkime, kad tarp skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra a nelyginių skaičių, o tarp skaičių $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yra b nelyginių skaičių. Kadangi sumos $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ir $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ lyginės, tai a ir b yra lyginiai skaičiai.

Jei skaičius z yra nelyginis, tai kiekvienoje poroje (x_i, y_i) nelyginis yra lygiai vienas skaičius. Bet tada $a + b = n$, ir skaičius n lyginis. Vadinasi, skaičius z lyginis.

Kiekvienoje poroje (x_i, y_i) skaičiai yra to paties lyginumo. Jei skaičiai x_i ir y_i abu lyginiai, tai $z = x_i^2 + y_i^2$ dalijasi iš 4, o jei skaičiai $x_i = 2u+1$ ir $y_i = 2v+1$ abu nelyginiai, tai $z = 4u^2+4u+4v^2+4v+2$ nesidalija iš 4. Vadinasi, jei z nesidalija iš 4, tai visi skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nelyginiai, ir $a = b = n$ yra lyginis skaičius.

Todėl z dalijasi iš 4, o skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lyginiai. Tada nelyginis n ir skaičiai $x_1' = x_1/2, x_2' = x_2/2, \ldots, x_n' = x_n/2$, $y_1' = $ $= y_1/2, y_2' = y_2/2, \ldots, y_n' = y_n/2$ tenkina uždavinio sąlygą. Tačiau skaičius $z' = x_1'^2 + y_1'^2 = z/4$ yra mažesnis už z, o tai prieštarauja skaičiaus z minimalumui.

Gavome prieštarą. Vadinasi, skaičius n turi būti lyginis.

Įrodyta.

9. Ats. 2^{31}.

Aušros skaičius iš eilės pažymėkime $p_1, p_2, \ldots, p_8$. Kiekvieną skaičių p_i turime parinkti taip, kad $p_i + i$ dalytųsi iš kuo didesnio dvejeto laipsnio.

Jei $p_2 \neq 2$, tai skaičius $p_2 + 2$ nelyginis ir nesidalija net iš 2^1. Todėl turime rinktis $p_2 = 2$. Analogiškai $p_4 = p_6 = p_8 = 2$.

Kad skaičius $p_1 + 1$ dalytųsi bent iš 2^7, jis turi būti lygus 128 (kita reikšmė 256 jau per didelė). Tada $p_1 = 127$. Ši reikšmė tinka, nes 127 yra pirminis skaičius (jis toks yra, nes nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus iki $\sqrt{127} < 13$).

Kad skaičius $p_3 + 3$ arba $p_5 + 5$ dalytųsi bent iš 2^6, jis turi būti lygus vienam iš skaičių 64, 128, 192 (kita reikšmė 256 jau per didelė). Tinka tik $p_3 = 61$ ir $p_5 = 59$.

Kad skaičius $p_7 + 7$ dalytųsi bent iš 2^5, jis turi būti lygus vienam iš skaičių 32, 64, 96, 128, 160, 192. (Kitas skaičius 224 jau per didelis.) Tinka tik $p_7 = 89$.

Pasirinkę nurodytas reikšmes, ir gausime didžiausią galimą dvejeto laipsnį, iš kurio dalijasi sandauga $(p_1+1)(p_2+2)\ldots(p_8+8)$. Didžiausi dvejeto laipsniai, iš kurių gali dalytis atskiri dauginamieji $p_i + i$, lygūs:

2^7, kai $i = 1$; 2^6, kai $i = 3$ ir 5; 2^5, kai $i = 7$;
2^3, kai $i = 6$; 2^2, kai $i = 2$; 2^1, kai $i = 4$ ir 8.

Visą sandaugą galintis dalyti didžiausias dvejeto laipsnis lygus

$$2^{7+6+6+5+3+2+1+1} = 2^{31}.$$

10. Ats. Rytis.

Norint įrodyti, kad Rytis turi pergalės strategiją, pakanka įrodyti tokį teiginį: kad ir koks natūralusis skaičius N būtų užrašytas lentoje prieš Ryčio ėjimą, Rytis gali prirašyti tokį skaitmenį a, kad joks skaičius, kurį tolimesniu ėjimu gali gauti Vakarė, t. y. joks iš 100 skaičių $\overline{Na00}, \overline{Na01}, \ldots, \overline{Na99}$, nesidalytų iš 112. Tam pakanka, kad skaičius $\overline{Na00} = 1000N + 100a$ dalytųsi iš 112 su viena iš liekanų 1, 2, …, 12 (tada joks iš 100 skaičių nesidalys su liekana 0). Kadangi skaičiai 1000, 100 ir 112 dalijasi iš 4, tai apsiribokime liekanomis 4, 8 ir 12.

Ryčiui pakanka taip parinkti skaitmenį a, kad galiotų sąlyga

$$1000N + 100a \equiv 4, 8 \text{ arba } 12 \pmod{112} \iff$$

$$250N + 25a \equiv 1, 2 \text{ arba } 3 \pmod{28} \iff$$

$$250N \equiv 3a+1, 3a+2 \text{ arba } 3a+3 \pmod{28}.$$

Skaičius $250N$ lygsta vienam iš skaičių $1, 2, \ldots, 28$ moduliu 28, tą nežinomą skaičių Rytis gali apskaičiuoti, jį pažymėkime u. Skaičius u lygsta vienam iš skaičių 1, 2 ir 3 moduliu 3, kurį atėmus iš u, gaunamas sveikasis skaičius nuo 0 iki 27, dalus iš 3, t. y. lygus $3a$, kur $a = 0, 1, \ldots, 9$. Visą laiką rinkdamasis būtent tokį skaičių a, Rytis užsitikrins sąlygos $250N \equiv 3a{+}1, 3a{+}2$ arba $3a{+}3 \pmod{28}$ teisingumą, o todėl ir pergalę žaidime.

11. Ats. Taip, gali.

a	b	x
c	y	d
z	e	f

Tarkime, Joana įrašo lentelėje skaičius a, b, c, d, e, f, o Jonas – skaičius x, y, z, kaip parodyta paveikslėlyje. Kad Joana pasiektų savo tikslą, jai pakanka taip parinkti savo skaičius, kad galiotų lygybės $ab = df$, $cd = be$ ir $ac = ef$. Tada, kad ir kokie būtų Jono skaičiai x, y, z, eilučių skaičių sandaugos abx, cdy, efz bus atitinkamai lygios stulpelių skaičių sandaugoms dfx, bey, acz. Pastebėjus, kad lygybės $ab = df$, $cd = be$, $ac = ef$ ekvivalenčios lygybėms $a : f = d : b = e : c$, jau visai lengva parinkti jas tenkinančius skaičius. Kadangi $2 : 1 = 6 : 3 = 8 : 4$, tai

Joana gali pasirinkti skaičius $a = 2, b = 3, c = 4, d = 6, e = 8, f = 1$ ir jos tikslas bus pasiektas.

12. Ats. 122301456789.

Skaičiuje n turi būti visi 10 skirtingų skaitmenų. Be to, kad būtų galima gauti skaičius 11 ir 22, skaitmenų 1 ir 2 skaičiuje n turi būti bent po du. Vadinasi, skaičius n turi mažiausiai 12 skaitmenų. Ieškokime tokios jo galimos reikšmės, kuri turėtų tik 12 skaitmenų. Tada tie skaitmenys yra 0, 1, 2, …, 9, 1, 2, parašyti tam tikra tvarka.

Negausime mažesnės n reikšmės, nei imdami pirmąjį skaitmenį, lygų 1. Kokia tada mažiausia galima antrojo skaitmens reikšmė? Tai ne 0 (kitaip išbraukdami skaitmenis niekaip negautume skaičiaus 20) ir ne 1 (niekaip negautume skaičiaus 21). Todėl negausime mažesnės n reikšmės, nei imdami pirmuosius du skaitmenis 12. Toliau mąstykime panašiai. Jei pirmieji skaitmenys yra 12, tai trečiasis skaitmuo nėra 0 (niekaip negautume skaičiaus 30) ir nėra 1 (niekaip negautume skaičiaus 31). Negausime mažesnės n reikšmės, nei imdami pirmuosius tris skaitmenis 122. Vėl negalime prirašyti ketvirtojo skaitmens lygaus 0 arba 1. Jis nelygus ir 2, nes jau turime du dvejetus. Todėl negausime mažesnės n reikšmės, nei imdami pirmuosius keturis skaitmenis 1223. Dabar mažesnio skaičiaus negausime, nei likusius 8 skaitmenis surašę didėjimo tvarka: 122301456789. Ši reikšmė tenkina uždavinio sąlygą, todėl yra mažiausia galima n reikšmė.

13. Ats. 928.

Nagrinėkime visas dėžes, kurių numeriai nėra 1, 4, 7, …. Jas suskirstykime į gretimų dėžių 33 poras: dėžės 2 ir 3, 5 ir 6, …, 98 ir 99. Kadangi gretimose dėžėse rutulių skaičiai skiriasi per 1, tai kiekvienoje poroje yra dėžė su nelyginiu rutulių skaičiumi. Todėl bet kurioje dėžių poroje guli daugiausiai $10 + 9 = 19$ rutulių. Vadinasi, visose dėžėse yra ne daugiau nei $301 + 33 \cdot 19 = 928$ rutuliai.

Rutulių skaičius 928 įmanomas. Įsivaizduokime, kad rutulių skaičiai dėžėse iš eilės lygūs 10, 9, 10, 9, …, 10, 9. Šioje situacijoje 34 dėžėse 1, 4, 7, …, 100 yra $(10 + 9) \cdot 17 = 323$ rutuliai, o turėtų būti 301. Todėl imkime bet kurias 11 iš 17 dėžių 1, 7, 13, …, 96 ir sumažinkime kiekvienos iš jų rutulių skaičių nuo 10 iki 8. Gretimose dėžėse rutulių skaičiai ir dabar skiriasi per 1. Dėžėse 1, 4, 7, …, 100 rutulių skaičius sumažėja iki $323 - 11 \cdot 2 = 301$. Vadinasi, uždavinio sąlyga tenkinama. Bendras rutulių skaičius visose dėžėse lygus $10 \cdot 50 + 9 \cdot 50 - 11 \cdot 2 = 928$.

14. Ats. a) 4; b) ne; c) ne.

Po kiekvieno ėjimo skaičių suma lentoje padidėja $1 + 2 + 3 + 3 = 9$, todėl po k ėjimų ji lygi $9k$ ir visada dalijasi iš 9.

a) Jei lentoje pasirodo iš eilės einantys natūralieji skaičiai, tai jų suma ne mažesnė nei $1+2+3+\ldots+8 = 36$. Prireiks ne mažiau nei $36 : 9 = 4$ ėjimų. Tiek jų ir pakanka. Pavyzdžiui, skaičius galima didinti taip: 1) 3, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 1; 2) 6, 2, 3, 1, 0, 3, 2, 1; 3) 6, 4, 6, 2, 3, 3, 2, 1; 4) 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

b) Kadangi 2018 nesidalija iš 9, tai ir $2018 \cdot 8$ nesidalija iš 9. Vadinasi, 8 skaičių 2018 lentoje gauti neįmanoma.

c) Tarkime, kad lentoje gauti skaičiai $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_8$, kuriems $a_1 a_2 \ldots a_8 = 2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Skaičiai 3, 5, 11, 13 pirminiai, todėl sandaugoje $a_1 a_2 \ldots a_8$ daugiausiai 4 dauginamieji didesni už 1, o jei tokių yra lygiai 4, tai jie lygūs skaičiams 3, 5, 11, 13.

Pastaruoju atveju lentoje užrašyti skaičiai 1, 1, 1, 1, 3, 5, 11, 13. Jų suma lygi 36, todėl turėjo būti atlikti $36 : 9 = 4$ ėjimai. Bet per tuos 4 ėjimus neįmanoma gauti skaičiaus $13 > 3 + 3 + 3 + 3$. Vadinasi, sandaugoje $a_1 a_2 \ldots a_8$ didesni už 1 yra mažiau nei 4 dauginamieji.

Tada $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$. Didinami 2 arba 3 vienetais galėjo būti tik skaičiai, iš kurių gauti a_6, a_7, a_8. Todėl bet kurio ėjimo metu buvo didinami 3 skaičiai, iš kurių gauti a_6, a_7, a_8 (didinami per 2 arba 3), o padidinus ketvirtąjį skaičių per 1 kaskart buvo gaunamas lygiai vienas iš $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Vadinasi, ėjimų buvo lygiai 5. Tada $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 9 \cdot 5 = 45$ ir $a_6 + a_7 + a_8 = 40$. Joks iš skaičių a_6, a_7, a_8 negali dalytis vienu metu iš kurių nors dviejų iš skaičių 5, 11 ir 13 (būtų per didelis). Todėl vienas iš skaičių a_6, a_7, a_8 dalijasi iš 5, kitas iš 11, o trečias iš 13. Vienas iš jų dar turi dalytis iš 3. Kadangi $a_6 a_7 a_8 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, tai skaičiai a_6, a_7, a_8 lygūs arba $3 \cdot 5, 11, 13$, arba $5, 3 \cdot 11, 13$, arba $5, 11, 3 \cdot 13$. Tačiau nė vienu atveju trijų skaičių suma nėra lygi 40.

Gavome prieštarą. Vadinasi, skaičių sandauga lentoje negali būti 2145.

15. Po kiekvienų rungtynių bendras surinktų taškų skaičius padidėja $3+0 = 3$ arba $1+1=2$ taškais. Iš viso rungtynių buvo $C_6^2 = 15$. Tarkime, kad x rungtynių baigėsi lygiosiomis. Tarkime, kad komandos surinko po $a, a+2, a+4, a+6, a+8, a+10$ taškų. Tada taškų suma yra $6a+30 = 2x+3\cdot(15-x) = 45-x \leqslant 45$. Todėl $a = 0$, 1 arba 2 ir atitinkamai $x = 15, 9$ arba 3. Atvejį $a = 0$ ir $x = 15$ iš karto galima atmesti: komandos surinko ne po lygiai taškų, todėl bent vienerios iš 15 rungtynių nesibaigė lygiosiomis.

   Tarkime, $a = 1$. Tada rungtynės buvo pralaimėtos $15-x = 6$ kartus, o komandos surinko po 1, 3, 5, 7, 9, 11 taškų. Komanda su 1 tašku turėjo vienerias lygiąsias ir likusius 4 kartus pralaimėjo. Komanda su 3 taškais laimėjo arba iškovojo lygiąsias daugiausiai 3 kartus, todėl bent dusyk pralaimėjo. Tai jau $4+2 = 6$ pralaimėjimai, tad kitos komandos, išskyrus šias dvi, nepatyrė pralaimėjimų. Bet komanda su 11 taškų laimėjo bent prieš 3 kitas (kitaip būtų surinkusi daugiausiai $3+3+1+1+1$ taškų), todėl yra bent 3 pralaimėjusios komandos. Gavome prieštarą.

   Vadinasi, $a = 2$. Tada $x = 3$, o komandos surinko po 2, 4, 6, 8, 10, 12 taškų. Kadangi komandos taškų skaičius, surinktas iš pergalių, turi dalytis iš 3, tai komandos su 2 ir 8 taškais iš lygiųjų surinko bent po 2 taškus, o su 4 ir 10 taškų – bent po 1 tašką. Tai jau visi $2x = 6$ taškai, komandų surinkti iš lygiųjų. Vadinasi, likę taškai komandų surinkti iš pergalių. Tada 4-ąją vietą užėmusios komandos 6 taškai gauti tik iš pergalių, o tų pergalių (laimėtų rungtynių) buvo $6:3=2$.

   Įrodyta.

16. Ats. $3:2$.

   Taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti į apskritimą, o sujungus jo viršūnes su apskritimo centru, daugiakampis padalijamas į lygius lygiašonius trikampius, kurių šoninės kraštinės yra apskritimo spinduliai. Atlikime tai duotoje situacijoje. Apskritimo spindulį pažymėkime r. Dvylikakampis padalijamas į 12 lygiašonių trikampių, kurių šoninės kraštinės lygios r, o kampas tarp tų šoninių kraštinių lygus $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Vadinasi, kiekvieno trikampio plotas lygus $\frac{r^2 \sin 30^\circ}{2} = \frac{r^2}{4}$. Tuo pačiu kvadratas padalijamas į 4 lygiašonius trikampius, kurių šoninės kraštinės lygios r, o kampas tarp tų šoninių kraštinių lygus $360^\circ : 4 = 90^\circ$. Vadinasi, kiekvieno trikampio plotas lygus $\frac{r^2}{2}$. Tada ieškomas plotų santykis yra

$$12 \cdot \frac{r^2}{4} : \left(4 \cdot \frac{r^2}{2}\right) = 3r^2 : 2r^2 = 3 : 2.$$

17. Ats. $\frac{162}{5} = 32\frac{2}{5}$.

Trikampio ABC plotas lygus $\frac{12^2}{2} = 72$. Kadangi trikampis lygiašonis, tai pusiaukraštinė CM yra jo simetrijos ašis, o $\triangle ACM$ plotas yra pusė $\triangle ABC$ ploto – 36. Toliau rasime $\triangle CDE$ plotą.

Išveskime $\triangle BCE$ aukštinę EH. Pusiaukraštinė CM yra ir pusiaukampinė (lygiašoniame $\triangle ABC$), todėl $\angle ECH = 45°$, o statusis $\triangle CHE$, turintis $45°$ kampą, yra lygiašonis: $CH = EH$. Statieji trikampiai BHE ir BCE panašūs (turi bendrą smailųjį kampą), todėl $BH : BC = EH : : DC$, $BH : 12 = EH : 3$ ir $4EH = BH = BC - CH = 12 - EH$. Tada $CH = EH = \frac{12}{5}$. Ilgis CH parodo, kiek nutolusios lygiagrečios atkarpos EH ir CD (jos abi statmenos atkarpai CH), jis lygus $\triangle CDE$ aukštinės iš E ilgiui h. Vadinasi, $\triangle CDE$ plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$.

Keturkampio $AMED$ plotą gausime iš $\triangle ACM$ ploto atėmę $\triangle CDE$ plotą. Jis lygus $36 - \frac{18}{5} = \frac{162}{5}$.

18. Ats. 2,8 cm, 3,5 cm ir $\frac{7\sqrt{21}}{10}$ cm.

Perlinkio atkarpos galus kraštinėse BA ir BC pažymėkime atitinkamai E ir F. Pažymėkime $BE = x$ cm, $BF = y$ cm. Pastebėkime, kad du rombo kampai lygūs po $60°$, o tada kiti du – po $120°$.

Performuluokime, ką geometriškai reiškia, kad perlenkus rombą taškai B ir H sutapo. Tai reiškia, kad perlinkio linija eina per vidurį tarp šių taškų; tiksliau pasakius, ji yra atkarpos BH vidurio statmuo. Vidurio statmens bet kuris taškas dėl simetrijos yra vienodai nutolęs nuo taškų B ir H. Todėl $BE = EH$ cm ir $BF = FH = y$ cm.

Taigi, $EH = x$ cm, $AE = AB - BE = (4-x)$ cm ir $AH = AD/2 = 2$ cm. Pritaikykime kosinusų teoremą trikampiui AEH:

$$EH^2 = AE^2 + AH^2 - 2AE \cdot AH \cos 120°,$$

$$x^2 = (4-x)^2 + 4 + 2(4-x) = 28 - 10x + x^2, \qquad x = \frac{14}{5} \text{ (cm)}.$$

Jei iš taško C nuleisime statmenį CH' į atkarpą AD, tai stačiajame trikampyje CDH' turime $DH' = CD\cos\angle CDH' = AD/2$, t. y. $H' = H$. Taigi $CH = CD\sin\angle CDH = 2\sqrt{3}$ cm, $CH \perp AD$ ir $AD||BC$, tad $CH \perp BC$. Trikampis CFH statusis ir $CF = BC - BF = (4-y)$ cm, todėl

$$FH^2 = CF^2 + CH^2, \quad y^2 = (4-y)^2 + 12 = 28 - 8y + y^2, \quad y = \frac{7}{2}\ \text{(cm)}.$$

Pagaliau $EF^2 = BE^2 + BF^2 - 2BE\cdot BF\cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy = \frac{49\cdot 21}{100}$ (cm^2) ir $EF = \frac{7\sqrt{21}}{10}$ cm.

19. Apskritimų centrus atitinkamai pažymėkime O_1, O_2, O_3. Kadangi spinduliai AO_1, BO_2, CO_3 yra statmeni apskritimų liestinei AC, tai keturkampiai $ABO_2O_1, BCO_3O_2, ACO_3O_1$ yra stačiosios trapecijos (arba stačiakampiai, jei atitinkami du spinduliai lygūs; šiuo atveju situacija tik supaprastėja, o toliau gaunamos lygybės nepakinta). Kiekvieną iš jų galima padalyti į stačiakampį ir statųjį trikampį. Pavyzdžiui, trapecijos ABO_2O_1 atveju gaunamas statusis trikampis, kurio vienas statinis lygus AB, kitas – trapecijos pagrindų skirtumui $|r_1 - r_2|$, o įžambinė – spindulių sumai $r_1 + r_2$. Tada $(r_1+r_2)^2 = AB^2 + (r_1-r_2)^2$, $AB^2 = 4r_1r_2$ ir $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$. Analogiškai $BC = 2\sqrt{r_2r_3}$ ir $CA = 2\sqrt{r_1r_3}$.

Pažymėkime $a = \sqrt{r_1}$, $b = \sqrt{r_3}$. Kadangi $AB + BC = AC$, tai $AB + BC + CA = 2AC = 4ab$ ir

$$ab = \sqrt{r_1r_3} = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_3r_2} = \sqrt{r_2}(a+b), \qquad \sqrt{r_2} = \frac{ab}{a+b}.$$

Duotoji nelygybė virsta tokia, kurią turime įrodyti:

$$16\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right) \geqslant 9\cdot 4ab \qquad \text{arba}$$
$$16((a^2+b^2)(a+b)^2 + a^2b^2) \geqslant 36ab(a+b)^2.$$

Ją padaliję iš 4, atskliautę, suprastinę, gauname tokią nelygybę:

$$4a^4 + 4b^4 \geqslant a^3b + ab^3 + 6a^2b^2.$$

Ją galima įrodyti, remiantis vien aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe:

$$4a^4 + 4b^4 = \frac{a^4 + a^4 + a^4 + b^4}{4} + \frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} + 3(a^4 + b^4) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[4]{a^{12}b^4} + \sqrt[4]{a^3b^{12}} + 3\cdot 2\sqrt{a^4b^4} = a^3b + ab^3 + 6a^2b^2.$$

Įrodyta.

20. Nagrinėkime tokį tašką R, kad BR yra Γ skersmuo. Tada $\angle BDR = 90^\circ$ (remiasi į skersmenį) ir $\angle PDR + \angle PHR = 180^\circ$. Vadinasi, keturkampis $PHRD$ įbrėžtinis: taškas R priklauso apskritimui ω, einančiam per P, H, D (ir Q). Tada $\angle PQR = \angle PHR = 90^\circ$ (remiasi į tą patį lanką). Keturkampio $PQRD$ kampai P, D, Q statūs, todėl tai yra stačiakampis. Apskritimo Γ stygos DR vidurio statmuo eina per šio apskritimo centrą O. Jis yra ir stačiakampio $PQRD$ priešingos kraštinės PQ vidurio statmuo, o kadangi statmenas stygai AC, tai ir ją dalija pusiau. Vadinasi, atkarpų AC ir PQ vidurio taškai sutampa. Iš to išplaukia, kad to bendro vidurio taško atžvilgiu taškas P simetriškas taškui Q, o taškas A – taškui C. Todėl $AP = CQ$.

Įrodyta.