10-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Pažymėkime $a = 1-x^2-y^2$ ir $b = 1-z^2-t^2$. Tada $ab > (xz+yt-1)^2 \geqslant 0$. Reikia įrodyti, kad $a < 0$.

   Tarkime, kad $a \geqslant 0$. Kadangi $ab > 0$, tai $a > 0$ ir $b > 0$. Be to,
$$1 - xz - yt = \frac{2 - 2xz - 2yt}{2} =$$
$$= \frac{a + b + (x - z)^2 + (y - t)^2}{2} \geqslant \frac{a + b}{2} > 0.$$
   Todėl
$$ab > (xz + yt - 1)^2 \geqslant \frac{(a + b)^2}{4} \quad \text{ir} \quad \sqrt{ab} > \frac{a + b}{2}.$$
   Pastaroji nelygybė prieštarauja aritmetinio ir geometrinio vidurkio nelygybei, kurią turi tenkinti $a, b > 0$. Gavome prieštarą. Vadinasi, $a < 0$.

   Įrodyta.

2. Perfomuluokime sąlygą: reikia įrodyti, kad iš 10 skaičių galima parinkti tokius keturis, kad dviejų iš jų skirtumas būtų lygus kitų dviejų skirtumui. Patogu (nors ir nebūtina) nagrinėti 10 skaičių kaip skaičių tiesės taškus. Imdami bet kuriuos du taškus iš 10-ies, galime gauti $C_{10}^2 = 45$ intervalus. Reikia įrodyti, kad du intervalai, kurių galai yra 4 skirtingi taškai, yra vienodo ilgio. Tarkime, kad taip nėra. Ši prielaida reiškia, kad jei du intervalai yra vienodo ilgio, tai jie turi bendrą galo tašką. Iš to iš karto išplaukia, kad jokie trys iš 45 intervalų nėra vienodo ilgio.

   Kiekvieno intervalo ilgis yra vienas iš skaičių 1, 2, 3, …, 36. Intervalų yra 45, o galimų ilgių yra 36. Be to, bet kuriam iš 36 skaičių yra daugiausiai du tokio ilgio intervalai. Remiantis Dirichlė principu, mažiausiai 9-iems iš 36 skaičių egzistuoja po du tokio ilgio intervalus. Gauname devynias intervalų poras, kur du intervalai vienodo ilgio ir turi bendrą galo tašką. Kiekvienas iš tų 9 bendrų taškų yra vienas iš 10 duotųjų taškų, bet negali būti nei pats kairiausias, nei pats dešiniausias iš jų (nes yra tarp kitų dviejų iš 10 taškų). Todėl yra dvi intervalų poros $A_1B_1 = B_1C_1$ bei $A_2B_2 = B_2C_2$, kurioms bendras intervalų galo taškas yra tas pats: $B_1 = B_2$. Tada 4 taškai A_1, A_2, C_1, C_2 yra skirtingi ir $A_1A_2 = C_1C_2$. Gavome prieštarą pradinei prielaidai. Vadinasi, iš 10 skaičių galima parinkti tokius keturis, kad dviejų iš jų skirtumas būtų lygus kitų dviejų skirtumui.

Įrodyta.

3. Iš $\triangle ABC$ apibrėžtinio apskritimo centro O bei iš taško F išveskime statmenis į tiesę BC, kurių pagrindus atitinkamai pažymėkime N ir P. Kadangi $OF||BC$, tai $FP = ON$. Tiesių AB ir HP sankirtą pažymėkime K. Trikampio ABC kampus atitinkamai pažymėkime α, β, γ, o apibrėžtinio apskritimo spindulį – R. Tada $ON = OB\cos\alpha = R\cos\alpha$ ir $AH = AE : \sin\gamma = AB\cos\alpha : \sin\gamma = 2R\cos\alpha = 2ON = 2FP$. Kadangi $AH||FP$ ir $AH = 2FP$, tai FP yra $\triangle AHK$ vidurio linija. Tada turime dar dvi šio trikampio vidurio linijas: $FM||HP$ ir $PM||AB$. Kadangi $CH \perp AB$, tai $CH \perp PM$. Vadinasi, taškas H yra $\triangle MPC$ aukštinių CH ir MD sankirta. Tada $PH \perp MC$ ir $FM \perp MC$.

   Įrodyta.

4. Ats. $1, 4, 6$ ir visi pirminiai skaičiai.

   Tarkime, kad $n > 6$ yra sudėtinis skaičius, tenkinantis uždavinio sąlygą su atitinkamu skaičiumi k. Skaičius n turi daliklius 1, n ir bent vieną daliklį d_0, tenkinantį $2 \leqslant d_0 \leqslant \frac{n}{2}$. Tada skaičiai $1-k, d_0-k$ ir $n-k < n$ dalija n. Turime $n-k \leqslant \frac{n}{2}$ ir $k \geqslant \frac{n}{2}$. Tada n turi daliklį $1-k \leqslant 1-\frac{n}{2} < -\frac{n}{3}$. Vieninteliai galimi n dalikliai, mažesni už $-\frac{n}{3}$, yra $-\frac{n}{2}$ ir $-n$, todėl $k = 1+\frac{n}{2}$ arba $k = 1+n$.

   Pirmuoju atveju $n-k = \frac{n}{2}-1 > 6 : 2 - 1 = 2$ dalija skaičių n bei skaičių $2(n-k) = n-2$, todėl dalija ir skaičių 2. Prieštara.

   Antruoju atveju n dalijasi iš $d_0 - k = d_0 - n - 1 \leqslant -\frac{n}{2} - 1$. Tada $d_0 - k = -n$ ir $d_0 = 1$. Prieštara.

   Vadinasi, skaičius n yra pirminis arba $n \leqslant 6$. Jei skaičius n pirminis arba $n = 1$, tai galima imti $k = n+1$. Vieninteliai teigiami n dalikliai šiuo atveju yra 1 ir n, skaičius n dalijasi iš $1-k = -n$ ir iš $n-k = -1$. Likusiais atvejais $n = 4$ ir $n = 6$ galima imti atitinkamai $k = 3$ ir $k = 4$.