PASVALIO KRAŠTO
20-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2018 m. lapkričio 23 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Vaikas skaičiavo reiškinio $\frac{a+b}{c}$ reikšmę su skaičiuotuvu, pasirinkęs konkrečius natūraliuosius skaičius *a*, *b* ir *c*. Nežinodamas, kokia tvarka skaičiuotuvas atlieka sudėties ir dalybos veiksmus, jis iš eilės paspaudė klavišus

$\boxed{a}$, $\boxed{+}$, $\boxed{b}$, $\boxed{:}$, $\boxed{c}$, $\boxed{=}$

ir pamatė atsakymą 11. Pasitikrindamas jis sukeitė vietomis *a* ir *b*, paspaudė klavišus

$\boxed{b}$, $\boxed{+}$, $\boxed{a}$, $\boxed{:}$, $\boxed{c}$, $\boxed{=}$

ir labai nustebo, pamatęs atsakymą 14. Kokią reiškinio $\frac{a+b}{c}$ reikšmę turėjo gauti vaikas?

Sprendimas. Iš lygybių $a+\frac{b}{c}=11$ ir $b+\frac{a}{c}=14$ matyti, kad $c\neq 1,$ o skaičiai *b* ir *a* turi dalytis iš *c*. Pastaroji išvada reiškia, kad reiškinio $\frac{a+b}{c}$ reikšmė yra teigiamas sveikasis skaičius, didesnis už 1.

Sudėję abi lygybes, gauname lygybę $\frac{a+b}{c}\cdot(c+1)=25,$ iš kurios išplaukia, kad $c+1=5.$ O tai reiškia, kad $\frac{a+b}{c}=5.$

Ats.: 5.

2. Natūralusis skaičius *a* turi 2 skaitmenis, natūralusis skaičius *b* turi *a* skaitmenų, o natūralusis skaičius *c* turi *b* skaitmenų. Kokia yra mažiausia *c* reikšmė?

Sprendimas. Aišku, kad pasirinkus mažiausią skaičių *a* (taigi $a=10$) galima rasti mažiausią skaičių $b=10^9,$ o tada ir mažiausią skaičių $c=10^{10^9-1}.$

Ats.: $10^{10^9-1}.$

3. Raskite 5 natūraliuosius skaičius a, b, c, d, e $(a < b < c < d < e)$, kurie tenkina lygybę

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1.$$

Sprendimas. Aišku, kad

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

ir

$$\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Kadangi

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42},\quad \frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{42\cdot 43}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806},$$

tai

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}=1.$$

Ats.: $a=2,\ b=3,\ c=7,\ d=43,\ e=1806.$

4. Jono ir Jauniaus amžių (metais) santykis yra 3:1. Prieš 3 metus jis buvo 4:1. Po kelių metų Jono ir Jauniaus amžių santykis bus 2:1?

Sprendimas. Tegu x yra Jauniaus amžius. Tada (pagal uždavinio sąlygą) Jono amžius yra $3x$ metų.

Kadangi $\dfrac{3x-3}{x-3}=4$, tai $x=9$.

Jei ieškomas atsakymas yra y metų, tai

$$\frac{3x+y}{x+y}=2 \Rightarrow \frac{27+y}{9+y}=2 \Rightarrow y=9.$$

Ats.: Po 9 metų.

5. Jokūbas, Alisa ir Vilius nusipirko trijų skirtingų rūšių saldainių. Jokūbas už vieną eurą nusipirko 4 šokoladinius saldainius, karamelę ir irisą. Alisa už 70 euro centų nusipirko 3 irisus, 2 šokoladinius saldainius ir karamelę, o Vilius už 50 euro centų nusipirko 2 karameles ir šokoladinį saldainį. Kiek kainuoja karamelė?

Sprendimas. Tegu s, k ir i yra atitinkamai šokoladinio saldainio, karamelės ir iriso kaina (euro centais).

Remdamiesi sąlyga, gauname šias lygtis: $4s+k+i=100$, $2s+k+3i=70$ ir $s+2k=50$. Įrašę $s=50-2k$ į pirmą ir antrą lygtį, gauname dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases}-7k+i=-100,\\ -3k+3i=-30.\end{cases}$$

Iš pirmos lygties gauname, kad $i=7k-100.$ Šią dydžio i išraišką įrašę į antrą lygtį, gauname:

$$-3k+3(7k-100)=-30,\qquad 18k=270,\qquad k=15.$$

Taigi karamelės kaina yra 15 euro centų.

Ats.: 15 ct.

6. Keturi moksleiviai A, B, C ir D dalyvavo bėgimo varžybose. Moksleivis A pasakė, kad jis finišavo pirmas, B – kad jis finišavo ketvirtas, C – kad finišavo ne pirmas ir ne ketvirtas, o D – kad finišavo ne ketvirtas. Žinoma, kad trys moksleiviai sakė tiesą, o vienas – pamelavo. Kuris moksleivis finišavo pirmas, o kuris paskutinis?

Sprendimas. Jei C pamelavo, tai jis finišavo pirmas arba ketvirtas, bet tai reikštų, kad A arba B taip pat melavo. Vadinasi, moksleivis C sakė tiesą.

Jei D pamelavo, tai išeitų, kad ir B pamelavo, o melagis tik vienas. Taigi moksleivis D taip pat sakė tiesą.

Jei B būtų pamelavęs, išeitų, kad nė vienas moksleivis nebuvo paskutinis. Vadinasi, moksleivis B sakė tiesą. Jis varžybose buvo paskutinis. Pirmas finišavo moksleivis D.

Ats.: D – pirmas, B – paskutinis.

7. Kiek yra penkiaženklių skaičių, sudarytų iš skirtingų skaitmenų, tarp kurių yra skaitmuo 3?

Sprendimas. Iš viso yra $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ penkiaženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi, o be skaitmens 3 tokių skaičių yra $8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. Vadinasi, ieškomas skaičius yra $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6-8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=13776$.

Ats.: 13 776.

8. Kiek sveikųjų sprendinių $(a; b; c; d; e)$ turi lygtis

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=13?$$

Sprendimas. Aišku, kad $|a|, |b|, |c|, |d|, |e|\le 3$.

Jei vieno nežinomojo reikšmė 3 arba –3, tai likusių keturių kvadratų suma 4. O tai reiškia, kad visų keturių nežinomųjų reikšmės ± 1 arba vieno reikšmė ± 2, o likusių trijų – nuliai. Suskaičiavę gauname $5\cdot 2(2^4+4\cdot 2)=240$ sprendinių.

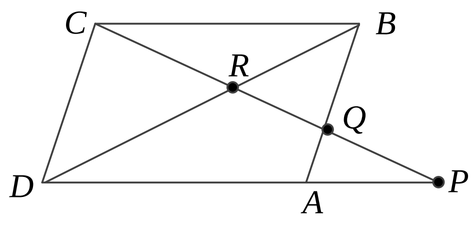
Jei nėra nežinomojo, kurio reikšmė būtų ± 3, tai trijų nežinomųjų reikšmės turi būti ± 2, vieno reikšmė ± 1 ir vieno – nulis. Keisdami skaičius vietomis gauname $5\cdot 4\cdot 2^4=320$ sprendinių.

Taigi iš viso lygtis turi $240+320=560$ sveikųjų sprendinių.

Ats.: 560.

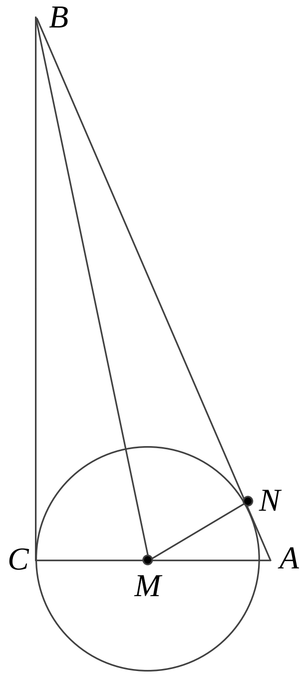
9. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės DA tęsinyje už taško A pažymėtas taškas P. Tiesė PC kerta atkarpas AB ir BD atitinkamai taškuose Q ir R. Raskite RC, jei $RP = m$, $RQ = n$.

Sprendimas. Trikampiai RBC ir RDP yra panašieji, todėl $\dfrac{RC}{RP}=\dfrac{RB}{RD}$. Trikampiai RBQ ir RDC irgi panašieji, todėl $\dfrac{RB}{RD}=\dfrac{RQ}{RC}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\dfrac{RC}{RP}=\dfrac{RQ}{RC}$, todėl $RC=\sqrt{RP\cdot RQ}=\sqrt{mn}$.



Ats.: $\sqrt{mn}$.

10. Stačiojo trikampio ABC statiniai $AC = 5$, $BC = 12$. Apskritimas, kurio centras M yra statinio AC taškas, liečia statinį BC taške C ir įžambinę AB taške N. Raskite to apskritimo spindulį.



Sprendimas. Kadangi atkarpa BM yra kampo B pusiaukampinė, tai statieji trikampiai MCB ir MNB yra lygūs, taigi $NB = BC = 12$. Kadangi įžambinė $AB = 13$, tai $AN = 1$. Statieji trikampiai ANM ir ACB yra panašieji, todėl $\dfrac{NM}{CB} = \dfrac{AN}{AC}$. Iš čia išplaukia, kad ieškomasis spindulio ilgis $NM = \dfrac{AN \cdot CB}{AC} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

Ats.: 2,4.

PASVALIO KRAŠTO
20-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

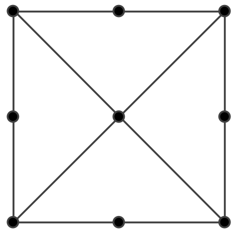
Pasvalys, 2018 m. lapkričio 23 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Plokštumoje pažymėti 9 taškai: keturios kvadrato viršūnės, to kvadrato visų kraštinių vidurio taškai ir jo įstrižainių susikirtimo taškas. Kiek iš viso yra trikampių, kurių viršūnės yra trys iš 9 pažymėtųjų taškų? Keli iš jų yra statieji?

Sprendimas. Aišku, kad iš 9 taškų galima sudaryti

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,6!} = 84$$



taškų trejetus. Bet tarp jų yra aštuoni taškų, esančių vienoje tiesėje, trejetai, kurie trikampio nesudaro. Vadinasi, iš viso yra $84-8=76$ trikampiai.

Stačiuosius trikampius galima suskaičiuoti taip:

1) yra 4 statieji trikampiai, kurių stačiojo kampo viršūnė yra ta pati kvadrato viršūnė;

2) yra 5 statieji trikampiai, kurių stačiojo kampo viršūnė yra tas pats kvadrato kraštinės vidurio taškas;

3) yra 8 statieji trikampiai, kurių stačiojo kampo viršūnė yra kvadrato centras.

Todėl iš viso gauname $4\cdot 4+5\cdot 4+8=44$ stačiuosius trikampius.

Ats.: 76; 44.

2. Keturi moksleiviai *A*, *B*, *C* ir *D* dalyvavo bėgimo varžybose. Moksleivis *A* pasakė, kad jis finišavo pirmas, *B* – kad jis finišavo ketvirtas, *C* – kad finišavo ne pirmas ir ne ketvirtas, o *D* – kad finišavo ne ketvirtas. Žinoma, kad trys moksleiviai sakė tiesą, o vienas – pamelavo. Kuris moksleivis finišavo pirmas, o kuris paskutinis?

Sprendimas. Jei *C* pamelavo, tai jis finišavo pirmas arba ketvirtas, bet tai reikštų, kad *A* arba *B* taip pat melavo. Vadinasi, moksleivis *C* sakė tiesą.

Jei *D* pamelavo, tai išeitų, kad ir *B* pamelavo, o melagis tik vienas. Taigi moksleivis *D* taip pat sakė tiesą.

Jei *B* būtų pamelavęs, išeitų, kad nė vienas moksleivis nebuvo paskutinis. Vadinasi, moksleivis *B* sakė tiesą. Jis varžybose buvo paskutinis. Pirmas finišavo moksleivis *D*.

Ats.: *D* – pirmas, *B* – paskutinis.

3. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (a; b), kurioms esant kvadratinės lygties $ax^2 - 10x + b = 0$ sprendiniai yra natūralieji skaičiai?

Sprendimas. Tegu natūralieji skaičiai m ir n yra kvadratinės lygties sprendiniai. Tada

$$ax^2 - 10x + b = a(x-m)(x-n) = a(x^2 - (m+n)x + mn).$$

Iš čia išplaukia, kad $a(m+n) = 10$ ir $b = amn.$ Kadangi $m+n \geq 2,$ tai galimos a reikšmės yra 1,2 ir 5.

Jei $a = 1,$ tai $m+n = 10.$ Todėl galimos b reikšmės yra $1 \cdot 1 \cdot 9 = 1 \cdot 9 \cdot 1 = 9,$ $1 \cdot 2 \cdot 8 = 1 \cdot 8 \cdot 2 = 16,$ $1 \cdot 3 \cdot 7 = 1 \cdot 7 \cdot 3 = 21,$ $1 \cdot 4 \cdot 6 = 1 \cdot 6 \cdot 4 = 24$ ir $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25.$

Jei $a = 2,$ tai $m+n = 5.$ Todėl galimos b reikšmės yra $2 \cdot 1 \cdot 4 = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$ ir $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$

Jei $a = 5,$ tai $m = n = 1$ ir $b = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$

Taigi gauname 8 skirtingas natūraliųjų skaičių poras (a; b).

Ats.: 8.

4. Teigiami realieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą $\dfrac{1}{a^2+4b+4} + \dfrac{1}{b^2+4a+4} = \dfrac{1}{8}.$ Raskite didžiausią sumos $a+b$ reikšmę.

Sprendimas. Kadangi $a^2 + 4 = (a-2)^2 + 4a$ ir $b^2 + 4 = (b-2)^2 + 4b,$ tai

$$a^2 + 4b + 4 = (a-2)^2 + 4(a+b) \geq 4(a+b) \text{ ir } b^2 + 4a + 4 = (b-2)^2 + 4(a+b) \geq 4(a+b).$$

Todėl $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{a^2+4b+4} + \dfrac{1}{b^2+4a+4} \leq \dfrac{1}{2(a+b)}.$ Iš čia gauname, kad $a+b \leq 4.$

Jei $a = b = 2,$ uždavinio sąlyga tenkinama, todėl 4 yra didžiausia sumos $a+b$ reikšmė.

Ats.: 4.

5. Kiek yra sveikųjų skaičių porų $(x;\, y),$ kurios tenkina lygtį $x^2 + y^2 + xy - x + y = 2$?

Sprendimas. Lygtį užrašykime pavidalu

$$x^2 + (y-1)x + (y^2 + y - 2) = 0$$

ir spręskime ją nežinomojo x atžvilgiu.

Šios kvadratinės lygties diskriminantas yra

$$D = (y-1)^2 - 4(y^2 + y - 2) = -3(y^2 + 2y - 3) = -3(y+3)(y-1).$$

Sąlyga $D \geq 0$ galioja, kai $y \in [-3; 1],$ todėl pakanka išspręsti lygtį šiais atvejais: $y = -3,$ $y = -2,$ $y = -1,$ $y = 0,$ $y = 1.$

Kai $y = -3,$ tai $x = 2.$

Kai $y = -2,$ tai $x = 0$ arba $x = 3.$

Kai $y = -1,$ x reikšmės nėra sveikieji skaičiai.

Kai $y = 0,$ tai $x = -1$ arba $x = 2.$

Kai $y = 1,$ tai $x = 0.$

Taigi gauname 6 sveikųjų skaičių poras ((2; –3), (0; –2), (3; –2), (–1; 0), (2; 0),(0; 1)), kurios tenkina lygtį.

Ats.: 6.

6. Raskite 5 natūraliuosius skaičius a, b, c, d, e $(a < b < c < d < e),$ kurie tenkina lygybę

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1.$$

Sprendimas. Aišku, kad

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \text{ ir } \frac{1}{n}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Kadangi $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$, $\frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{42\cdot 43}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$,

tai $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}=1.$

Ats.: $a=2,\ b=3,\ c=7,\ d=43,\ e=1806.$

7. Kalėdų Senelis siūlo vaikui pasirinkti du teigiamus realiuosius skaičius x ir y ir duoda jam tiek kilogramų saldainių, koks yra mažiausias iš skaičių x, $y+\frac{1}{x}$ ir $\frac{1}{y}$. Kokį didžiausią saldainių kiekį gali gauti vaikas?

Sprendimas. Tegu S yra mažiausias iš skaičių x, $y+\frac{1}{x}$ ir $\frac{1}{y}$.

Iš nelygybių $x\ge S$ ir $\frac{1}{y}\ge S$ gauname, kad $y+\frac{1}{x}\le\frac{2}{S}$. Taigi $S\le y+\frac{1}{x}\le\frac{2}{S}$. Iš šios dvigubos nelygybės išplaukia, kad $S\le\frac{2}{S}$. Vadinasi, $S\le\sqrt{2}$.

Kadangi reikšmė $S=\sqrt{2}$ yra pasiekiama pasirinkus, pavyzdžiui, $x=\sqrt{2}$ ir $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, tai galima daryti išvadą, kad didžiausias saldainių kiekis, kurį gali gauti vaikas, yra $\sqrt{2}$ kg.

Ats.: $\sqrt{2}$ kg.

8. Sakykime, kad n yra natūralusis skaičius, $a_1=n$, $a_2=\left[\frac{a_1}{3}\right]$, $a_3=\left[\frac{a_2}{3}\right]$ ir $a_4=\left[\frac{a_3}{3}\right]$; čia [...] žymi skaičiaus sveikąją dalį (didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už jį). Kiek yra natūraliųjų skaičių n aibėje $\{1; 2; 3; ...; 1000\}$ tokių, kad nė vienas iš skaičių a_1, a_2, a_3 ir a_4 nesidalija iš 3?

Sprendimas. Jei skaičius a_1 nesidalija iš 3, tai $a_1=n=3k_1+l_1$, $l_1=1, 2$, ir $a_2=\left[k_1+\frac{l_1}{3}\right]=k_1.$

Jei a_2 nesidalija iš 3, tai $a_2=k_1=3k_2+l_2$, $l_2=1, 2$, ir $a_3=\left[k_2+\frac{l_2}{3}\right]=k_2.$

Jei ir a_3 nesidalija iš 3, tai $a_3=k_2=3k_3+l_3$, $l_3=1, 2$, ir $a_4=\left[k_3+\frac{l_3}{3}\right]=k_3.$

O kad skaičius a_4 nesidalytų iš 3, turi būti $k_3=3k_4+l_4$, $l_4=1, 2.$

Iš čia gausime, kad

$$n=81k_4+27l_4+9l_3+3l_2+l_1=81k_4+l_5,\quad l_5=27l_4+9l_3+3l_2+l_1.$$

Liekanų l_1, l_2, l_3 ir l_4 skirtingų rinkinių $(l_1; l_2; l_3; l_4)$ yra $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$, mažiausia l_5 reikšmė yra $27+9+3+1=40$, o didžiausia l_5 reikšmė yra $27\cdot2+9\cdot2+3\cdot2+2=80$.

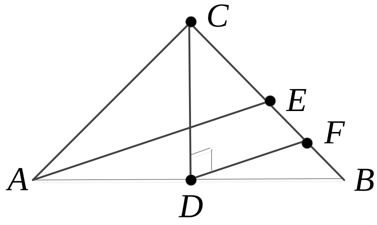
Galimoms k_4 reikšmėms rasti reikia išspręsti nelygybę $1\le 81k_4+l_5\le 1000$.

Aišku, kad mažiausia k_4 reikšmė yra 0, o didžiausia reikšmė gaunama iš nelygybės $81k_4+40\le 1000$ (ji lygi 11). Taigi $k_4=0, 1, 2, ..., 11.$

Gauname $16\cdot12=192$ natūraliųjų skaičių n, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 192.

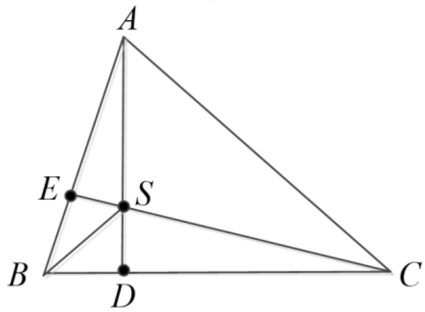
9. Taškas D yra lygiašonio trikampio ABC pagrindo AB vidurys, AE yra trikampio ABC pusiaukampinė. Žinoma, kad $AE = 2CD.$ Raskite trikampio ABC kampų didumus.



Sprendimas. Nubrėžkime $DF \parallel AE,\ F \in CB.$ Kadangi atkarpa DF yra trikampio AEB vidurinė linija, tai $DF = 0{,}5AE = CD,$ taigi trikampis FCD yra lygiašonis, todėl $\angle CEA = \angle CFD = \angle DCF = \angle ACD = 90^\circ - \angle A.$ Kadangi $\angle ACD = \angle DCE = \angle AEC = 90^\circ - \angle A,$ tai iš trikampio ACE turime $0{,}5\angle A + 3(90^\circ - \angle A) = 180^\circ.$ Iš čia gauname, kad $\angle A = 36^\circ.$

Ats.: $36^\circ,\ 36^\circ,\ 108^\circ.$

10. Taškai D ir E yra trikampio ABC kraštinėse – atitinkamai BC ir AB, tiesės AD ir CE susikerta taške S. Raskite trikampio ABC plotą, jei trikampių ACS, DCS ir AES plotai yra lygūs atitinkamai 6, 4 ir 3.



Sprendimas. Kadangi trikampių ASC ir DSC aukštinė iš viršūnės C yra bendra, tai jų plotų santykis lygus kraštinių AS ir DS santykiui, todėl $\frac{AS}{SD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$ Analogiškai trikampių ACS ir AES aukštinės iš viršūnės A sutampa, todėl šių trikampių plotų santykis lygus atkarpų CS ir ES santykiui: $\frac{CS}{ES} = \frac{6}{3} = 2.$ Jei trikampių BSE ir BDS plotus žymėsime x ir y, tai trikampių ABS ir BDS plotams $x+3$ ir y gauname lygtį $\frac{x+3}{y} = \frac{3}{2}.$ Analogiškai trikampių BCS ir BSE plotams $y+4$ ir x gauname lygtį $\frac{y+4}{x} = 2.$ Iš abiejų lygčių randame $x = 4{,}5,\ \ y = 5.$ Taigi trikampio ABC plotas $S = 6 + 4 + 3 + x + y = 22{,}5.$

Ats.: 22,5.