Rietavo XVII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2018 11 09

9 – 10 klasės

Sprendimai

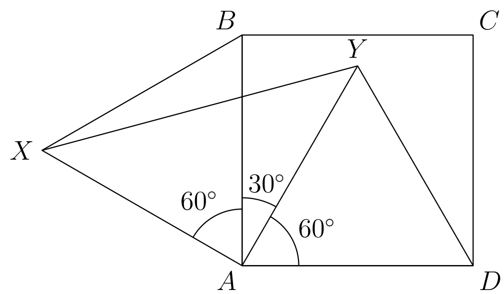
---

1 uždavinys. Grupė vaikų nori pasidalinti po lygiai tam tikrą pinigų sumą. Jei kiekvienas vaikas gautų po 60 centų, tai liktų 2 eurai ir 10 centų. Bet jei visa pinigų suma būtų 20 centų didesnė, tai kiekvienas vaikas gautų po 70 centų. Kiek vaikų yra grupėje?

Sprendimas. Tarkime grupėje yra n vaikų, o pinigų suma lygi S. Tuomet $60n + 210 = S$. Iš kitos pusės $70n - 20 = S$. Taigi $60n + 210 = 70n - 20$. Vadinasi, $n = 23$. ◀

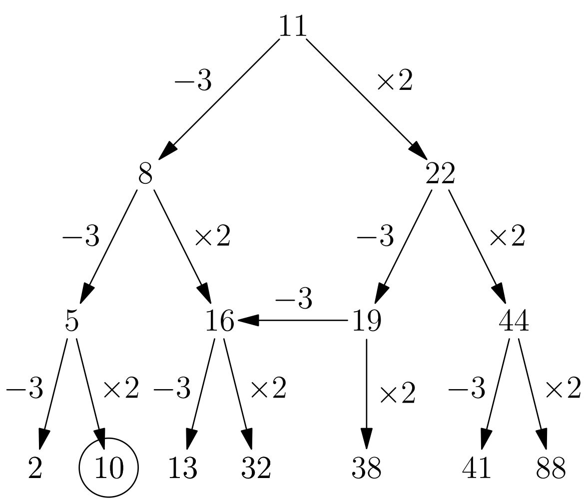
2 uždavinys. Taškas X yra kvadrato $ABCD$ išorėje, o taškas Y – kvadrato viduje. Trikampiai ABX ir ADY yra lygiakraščiai. Įrodykite, kad $XY = AC$.

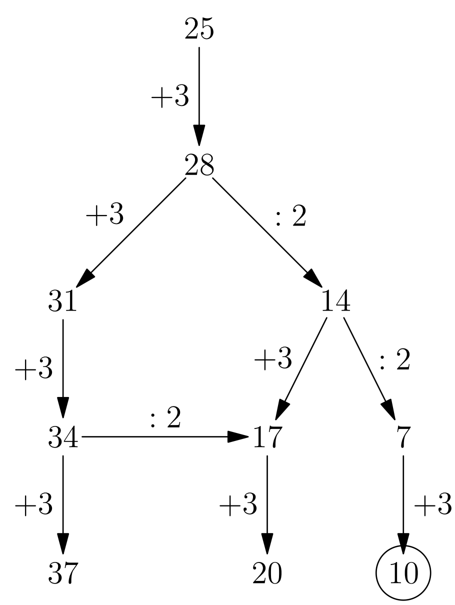
Sprendimas. Kadangi trikampiai ABX ir ADY yra lygiakraščiai, tai jų visi kampai lygūs $60°$. Tuomet $\angle YAB = \angle BAD - \angle YAD = 90° - 60° = 30°$. Taigi $\angle XAY = \angle XAB + \angle YAB = 60° + 30° = 90°$. Be to, $AX = AB = AD = AY$, todėl XAY yra statusis lygiašonis trikampis, kurio kiekvienas statinis yra lygus kvadrato kraštinei. Vadinasi, trikampio XAY įžambinė lygi kvadrato $ABCD$ įstrižainei. ◀



3 uždavinys. Salomėja kiekvienu ėjimu nutrina lentoje esantį skaičių ir vietoj jo užrašo arba dukart didesnį, arba trimis mažesnį. Ant lentos užrašytas skaičius 11. Kiek mažiausiai ėjimų reikia Salomėjai, kad iš 11 gautų 25?

Sprendimas.





Ieškosime skaičiaus eidami ir iš pradžių ir iš galo. Kairiajame paveikslėlyje parodyti galimi ėjimai pradedant nuo 11. Dešiniajame paveikslėlyje parodyti ėjimai nuo galo, todėl atimtis pakeičiama sudėtimi, o daugyba – dalyba. Abiejose schemose vienintelis sutampantis skaičius yra 10. Jį galime gauti trečiuoju ėjimu, o tada belieka 4 ėjimai iki 25. Taigi Salomėjai reikia mažiausiai 7 ėjimų. ◀

4 uždavinys. Šiandien (2018 m. lapkričio 9 d.) yra Gabijos gimtadienis. Ji pastebi, kad jos amžius lygus keturių jos gimimo metų skaitmenų sumai. Kiek Gabijai metų?

Sprendimas. Pažymėkime Gabijos metus $\overline{abcd}$. Tuomet sąlygą galime užrašyti lygtimi: $(a+b+c+d)+1000a+100b+10c+d=2018$. Keturių skaitmenų suma negali būti didesnė negu $9\cdot 4=36$, taigi Gabija gimė arba XX, arba XXI amžiuje.

Tarkime, kad Gabija gimė XX amžiuje. Tada $a=1$, o $b=9$. Taigi $1+9+c+d+1000+900+10c+d=2018$. Iš čia gauname, kad $11c+2d=108$. Kadangi $2d\leqslant 18$, tai $c=9$, bet tada $2d=9$. Taigi sveikųjų sprendinių nėra.

Dabar tarkime, kad Gabija gimė XXI amžiuje. Tada $a=2$, o $b=0$. Taigi $2+0+c+d+2000+10c+d=2018$. Iš čia gauname, kad $11c+2d=16$. Jei $c=1$, tai sveikųjų sprendinių vėl nėra. Taigi lieka vienintelis atvejis, kai $c=0$ ir $d=8$. Išsiaiškinome, kad Gabija gimė 2008 metais. Vadinasi, jai sukako 10 metų. ◀

5 uždavinys. Neringa turi aštuonias vienodas stiklines, kuriose visose yra skirtingas kiekis vandens. Neringa pasirenka kurias nors dvi iš stiklinių ir perpila dalį vandens iš vienos į kitą taip, kad abiejose stiklinėse vandens būtų po lygiai, tada vėl pasirenka kurias nors dvi stiklines ir išlygina jų vandens lygį ir t. t. Įrodykite, kad taip pilstant vandenį įmanoma išlyginti vandens kiekį visose stiklinėse.

Sprendimas. Sunumeruokime stiklines nuo 1 iki 8 ir pažymėkime pradinį vandens kiekį stiklinėse $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Neringa gali pilstyti taip: iš pradžių išlyginti vandens lygį tarp stiklinių nr. 1 ir nr. 2, tada – tarp stiklinių nr. 3 ir nr. 4. Tada pirmose dviejose stiklinėse bus $\frac{v_1+v_2}{2}$ vandens, o sekančiose dviejose – $\frac{v_3+v_4}{2}$ vandens. Tuomet galima sulyginti vandens kiekį tarp stiklinių nr. 1 ir nr.3, o tada tarp nr.2 ir nr.4 ir visose keturiose pirmose stiklinėse tada bus po

$$\frac{\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_3+v_4}{2}}{2}=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{4}$$

kiekis vandens.

Analogiškai galime išlyginti vandens kiekį tarp likusių keturių stiklinių. Tuomet suporuojame stiklines 1 su 5, 2 su 6, 3 su 7 ir 4 su 8, ir tada visose stiklinėse bus po lygiai vandens. ◀

6 uždavinys. Jonas Rietaviškis iš savo namų išeina aplankyti Girdvainių Jurgio. Tuo pačiu metu Jurgis iš savo namų išvažiuoja dviračiu pasitikti Jono Rietaviškio. Jie abu juda pastoviais greičiais ir susitinka taške, nutolusiame nuo Rietaviškio namų per 1 km. Tada Jonas Rietaviškis prisimena, kad neužkėlė vartų, todėl Jurgis nuvažiuoja iki draugo namų, užkelia vartus, iš karto apsisuka, pasiveja Rietaviškį ir likusius 4,5 km iki Jurgio namų jie šnekučiuodamiesi nueina kartu. Koks atstumas tarp Girdvainių Jurgio ir Jono Rietaviškio namų?

Sprendimas. Pažymėkime Jono Rietaviškio greitį raidę r, Girdvainių Jurgio greitį raide g, o kelio ilgį tarp jų namų raide s. Pirmo susitikimo metu, Jonas buvo nuėjęs 1 km, o Jurgis nuvažiavęs $s-1$ km. Galime sudaryti lygtį:

$$\frac{1}{r}=\frac{s-1}{g}.$$

Antro susitikimo metu Jonas buvo nuėjęs $s-4{,}5$ km, o Jurgis nuvažiavęs $2s-4{,}5$ km. Taigi turime antrąją lygtį:

$$\frac{s-4{,}5}{r}=\frac{2s-4{,}5}{g}.$$

Iš pirmosios lygties randame, kad $g=r(s-1)$. Įstatę reikšmę į antrąją lygtį gauname

$$\frac{s-4{,}5}{r}=\frac{2s-4{,}5}{r(s-1)}.$$

Nesunku pastebėti, kad abi lygties puses padauginus iš r, šis nežinomasis dingsta. Panaikinę vardiklius ir suprastinę ir sukėlę į vieną pusę gauname lygtį $s^2 - 7{,}5s + 9 = 0$. Ši lygtis turi du sprendinius: 6 ir 1,5. Čia svarbu patikrinti sprendinius. Antrasis sprendinys netinka, nes pagal sąlygą kelio ilgis tarp draugų namų yra didesnis už 4,5. Vadinasi, ieškomasis atstumas yra 6 km. ◀

7 uždavinys. Godos kiemo lygoje yra trys futbolo komandos: A (Auslindos), B (Boružės) ir C (Cikados). Jos tarpusavy sužaidžia lygiai vieną kartą per sezoną.

Godos sudaryta turnyrinė lentelė kažkuriuo sezono metu atrodė taip:

	Rungtynės	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Pelnyti įvarčiai	Praleisti įvarčiai
A	1	0	0	1	4	2
B	2	1	1	0	2	2
C	2	1	0	1	3	1

Vėliau ji pripažino, kad visi skaičiai lentelėje yra neteisingi, bet kiekvienas skaičius skiriasi nuo tikrojo lygiai per 1. Kokia buvo tikroji lentelė?

Sprendimas. Pirmiausia pastebėkime, kad visi lentelės nuliai iš tikrųjų turėtų būti vienetai, nes neigiamų skaičių lentelėje negali būti. Taigi Auslindos turi vieną pergalę ir vienas lygiąsias. Iš čia seka, kad jos sužaidė dvejas rungtynes ir nepatyrė pralaimėjimo.

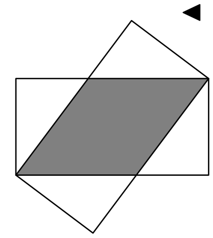
Boružės negalėjo sužaisti daugiau kaip 2 rungtynių, taigi jos sužaidė vienerias rungtynes ir patyrė vieną pralaimėjimą. Iš čia seka, kad jos neturi nei pergalių, nei lygiųjų.

Panašiai su Cikadom. Jos turi vienerias lygiąsias, sužaidė vienerias rungtynes ir neturi nei pergalių, nei pralaimėjimų.

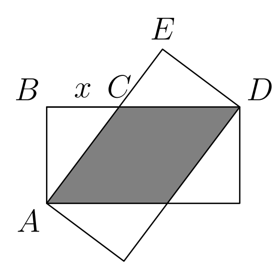
Iš viso sužaistų rungtynių yra $(2 + 1 + 1)/2 = 2$. Taigi, Auslindos sužaidė su Boružėm ir Cikadom, o Boružės su Cikadom dar nežaidė.

Beliko išsiaiškinti su įvarčiais. Cikados turi vienerias lygiąsias, todėl pelnytų ir praleistų įvarčių turi būti po tiek pat. Vadinasi, tos rungtynės baigėsi 2 : 2. Boružės turi vieną pralaimėjimą, todėl jos pelnė mažiau, negu praleido. Vadinasi rungtynės baigėsi 1 : 3. Visi Boružių ir Cikadų praleisti įvarčiai yra pelnyti Auslindų – iš viso 5. Ir atvirkščiai, Boružių ir Cikadų pelnyti įvarčiai yra praleisti Auslindų – iš viso 3. ◀

8 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti du vienodi stačiakampiai, kurie persidengdami sudaro rombą. Rombo plotas lygus 5/8 stačiakampio ploto. Koks yra ilgesniosios stačiakampio kraštinės santykis su trumpesniąja?



Sprendimas Pirmiausia pastebėkime, kad statieji trikampiai ABC ir CDE yra lygūs, nes $\angle BCA = \angle ECD$ ir $AC = CD$. Nemažindami bendrumo galime teigti, kad kraštinės AB ilgis lygus 1. Pažymėkime atkarpos BC ilgį raide x. Tuomet $CD = AC = \sqrt{1+x^2}$. Taigi stačiakampio plotas lygus $x + \sqrt{1+x^2}$, o rombo plotas lygus $\sqrt{1+x^2}$. Iš sąlygos žinome, kad



$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{5}{8}.$$

Sukeitę vardiklį su skaitikliu abiejose lygybės pusėse, gausime lygtį

$$\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1 = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow 25x^2 = 9 + 9x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Tuomet atkarpos BD ilgis lygus

$$\frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 2.$$

Vadinasi, ilgesniosios stačiakampio kraštinės santykis su mažesniąja yra 2 : 1.

9 uždavinys. Vieną vasaros dieną Melnragės paplūdimyje saule ir jūra džiaugiasi 190 žmonių. Iš jų 110 turi akinius nuo saulės, 70 turi kamuolį, o 95 turi skrybėlę. Visi turi bent vieną iš šių trijų daiktų. Taip pat žinome, kad 30 iš jų turi kamuolį ir akinius, 25 turi kamuolį ir skrybėlę, o 40 turi akinius ir skrybėlę. Kiek žmonių paplūdimyje turi visus tris daiktus?

Sprendimas. Pažymėkime žmones turinčius tik akinius, tik kamuolį arba tik skrybėlę atitinkamai raidėmis A, K ir S. Pažymėkime žmones turinčius tik akinius ir kamuolį raidėmis AK, tik akinius ir skrybėlę – raidėmis AS, o tik kamuolį ir skrybėlę – raidėmis KS. Galiausiai AKS tegu būna žmonės turintys visus tris daiktus.

Naudodami šiuos žymėjimus galime sudaryti keletą lygčių:

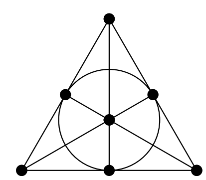
$$\begin{cases} A + AS + AK + AKS & = 110, \quad \text{(turi akinius)} \\ K + AK + KS + AKS & = 70, \quad \text{(turi kamuolį)} \\ S + AS + KS + AKS & = 95, \quad \text{(turi skrybėlę)} \\ AK + AKS & = 30, \quad \text{(turi akinius ir kamuolį)} \\ KS + AKS & = 25, \quad \text{(turi kamuolį ir skrybėlę)} \\ AS + AKS & = 40, \quad \text{(turi akinius ir skrybėlę)} \\ A + K + S + AK + AS + KS + AKS & = 190. \quad \text{(visi)} \end{cases}$$

Sudėję pirmas tris keturias lygtis ir paskutines keturias gauname:

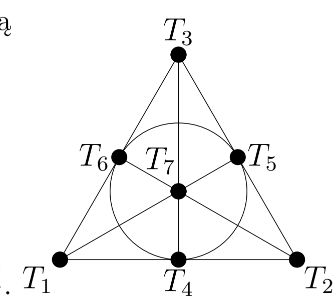
$$\begin{cases} A + K + S + 2AS + 2AK + 2KS + 3AKS & = 275, \\ A + K + S + 2AK + 2AS + 2KS + 4AKS & = 285. \end{cases}$$

Atėmę pirmą lygtį iš antros sužinome, kad $AKS = 10$. Taigi 10 žmonių turi visus tris daiktus. ◀

10 uždavinys. Brėžinyje pavaizduotos šešios atkarpos ir vienas apskritimas. Ant kiekvieno iš jų pažymėti trys taškai. Kiekvienam taškui priskirtas realusis skaičius. Kiekvienos atkarpos arba apskritimo visų trijų taškų (jiems priskirtų skaičių) suma lygi T. Įrodykite, kad kiekvienas iš septynių taškų yra lygus $\frac{T}{3}$.



Sprendimas. Turime šešias atkarpas ir vieną apskritimą, todėl bendra taškų suma lygi $7T$. Kiekvienas iš 7 brėžinyje pavaizduotų taškų priklauso arba trims atkarpoms, arba dviem atkarpom ir apskritimui, todėl 7 taškų suma lygi $\frac{7T}{3}$. Užrašykime lygčių sistemą taškui T_1:



$$\begin{cases} T_1 + T_6 + T_3 = T, \\ T_1 + T_7 + T_5 = T, \\ T_1 + T_4 + T_2 = T, \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 = \frac{7T}{3} \end{cases}$$

Sudėję pirmas tris lygtis ir iš jų atėmę ketvirtąją gausime $2T_1 = \frac{2T}{3}$. Taigi $T_1 = \frac{T}{3}$. Sudarę panašias lygčių sistemas kitiems taškams gausime, kad kiekvienas iš septynių taškų yra lygus $\frac{T}{3}$. ◀

Rietavo XVII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2018 11 09

11 – 12 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Kiek yra natūraliųjų skaičių n, tenkinančių nelygybę

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} > \frac{3}{100}?$$

Sprendimas. Jei $\frac{1}{n} > \frac{3}{100}$, tai padauginę abi nelygybės puses iš $100n$ turime, kad $100 > 3n$ arba $n < 33\frac{1}{3}$. Vadinasi, didžiausias n, tenkinantis nelygybę, yra 33, o mažiausias – 3. Taigi nelygybę tenkina visi natūralieji skaičiai iki 33 išskyrus vienetą ir dvejetą, o tokių yra 31. Arba, kitaip tariant, nuo 3 iki 33 iš viso yra $33 - 3 + 1 = 31$ skaičius.

◄

2 uždavinys. Kiek triženklių skaičių yra 34 kartus didesni už savo skaitmenų sumą?

Sprendimas. Nagrinėkime triženklį skaičių $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ ir jo skaitmenų sumą $a + b + c$. Jei tenkinama uždavinio sąlyga, tai $100a + 10b + c = 34 \cdot (a + b + c)$. Iš čia $66a - 33c = 24b$, $11(2a - c) = 8b$. Kairioji lygybės pusė dalijasi iš 11, todėl ir dešinioji turi dalytis iš 11, taigi b turi dalytis iš 11. Jei $b > 0$, taip būti negali, nes b yra vienaženklis skaičius, vadinasi $b = 0$. Tada ir $2a - c = 0$, $2a = c$.

Taigi visi triženkliai skaičiai, kurie yra 34 kartus didesni už savo skaitmenų sumą, yra šie: 102, 204, 306, 408. Iš viso tokių skaičių yra 4. ◄

3 uždavinys. Tegu $a_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{3}}, \ldots, a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}$. Su kokiu mažiausiu natūraliuoju n sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ yra sveikasis skaičius?

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n+2}{n+1}} = \sqrt{\frac{n+2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}},$$

nes $n \geqslant 1$. Taigi mažiausia sveikoji reikšmė, kurią gali įgyti $\sqrt{\frac{n+2}{2}}$ yra 2, o taip atsitiks, kai $n = 2^2 \cdot 2 - 2 = 6$.

◄

4 uždavinys. Neringa turi aštuonias vienodas stiklines, kuriose visose yra skirtingas kiekis vandens. Neringa pasirenka kurias nors dvi iš stiklinių ir perpila dalį vandens iš vienos į kitą taip, kad abiejose stiklinėse vandens būtų po lygiai, tada vėl pasirenka kurias nors dvi stiklines ir išlygina jų vandens lygį ir t. t. Įrodykite, kad taip pilstant vandenį įmanoma išlyginti vandens kiekį visose stiklinėse.

Sprendimas. Sunumeruokime stiklines nuo 1 iki 8 ir pažymėkime pradinį vandens kiekį stiklinėse $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Neringa gali pilstyti taip: iš pradžių išlyginti vandens lygį tarp stiklinių nr. 1 ir nr. 2, tada – tarp stiklinių nr. 3 ir nr. 4. Tada pirmose dviejose stiklinėse bus $\frac{v_1+v_2}{2}$ vandens, o sekančiose dviejose – $\frac{v_3+v_4}{2}$ vandens. Tuomet galima sulyginti vandens kiekį tarp stiklinių nr. 1 ir nr.3, o tada tarp nr.2 ir nr.4 ir visose keturiose pirmose stiklinėse tada bus po

$$\frac{\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_3+v_4}{2}}{2}=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{4}$$

kiekis vandens.

Analogiškai galime išlyginti vandens kiekį tarp likusių keturių stiklinių. Tuomet suporuojame stiklines 1 su 5, 2 su 6, 3 su 7 ir 4 su 8, ir tada visose stiklinėse bus po lygiai vandens. ◀

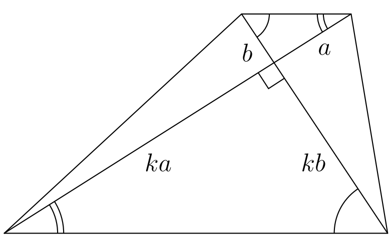
5 uždavinys. Pirminiai skaičiai a, b, c yra didesni už 3. Įrodykite, kad sandauga $(a-b)(b-c)(c-a)$ dalijasi iš 48.

Sprendimas. Kadangi a, b, c yra pirminiai skaičiai, didesni už 3, tai nė vienas iš jų nesidalija nei iš 2, nei iš 3.

Todėl $a-b$, $b-c$ ir $c-a$ bus lyginiai skaičiai, o jų sandauga dalysis iš $2\cdot 2\cdot 2=8$.

Taip pat bent dviejų iš skaičių a, b, c dalybos iš 3 liekana yra ta pati. Todėl šių skaičių skirtumas dalysis iš 3. Vadinasi, visa sandauga dalysis iš $8\cdot 3=24$, ką ir reikėjo įrodyti. ◀

6 uždavinys. Trapecijos įstrižainės susikerta stačiu kampu. Įrodykite, kad trapecijos pagrindų ilgių suma yra mažesnė už šoninių kraštinių ilgių sumą.



Sprendimas. Trapecijos įstrižainės padalija trapeciją į keturis stačiuosius trikampius. Kadangi trapecijos pagrindai yra lygiagretūs, tai jie su įstrižainėmis sudaro vienodus kampus, todėl galime pastebėti, kad trikampiai prie trapecijos pagrindų yra panašūs, ir pažymėti jų statinių ilgius a ir b bei ka ir kb atitinkamai.

Tuomet trapecijos pagrindai lygūs $\sqrt{a^2+b^2}$ ir $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}$, o jų suma bus $\sqrt{a^2+b^2}+k\sqrt{a^2+b^2}=(k+1)\sqrt{a^2+b^2}$.

. Panašiai trapecijos šoninių kraštinių ilgių suma bus $\sqrt{b^2+(ka)^2}+\sqrt{(kb)^2+a^2}$.

Tarkime priešingai, kad šoninių kraštinių ilgių suma yra nedidesnė už pagrindų ilgių sumą. Tada:

$$(k+1)\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{b^2+(ka)^2}+\sqrt{(kb)^2+a^2}.$$

Kadangi abi nelygybės pusės yra teigiamos, galime jas abi pakelti kvadratu:

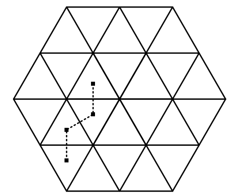
$$\begin{aligned}(k+1)^2\cdot(a^2+b^2)&\geqslant(b^2+(ka)^2)+2\sqrt{b^2+(ka)^2}\sqrt{(kb)^2+a^2}+((kb)^2+a^2)\\
k^2a^2+k^2b^2+2ka^2+2kb^2+a^2+b^2&\geqslant b^2+k^2a^2+2\sqrt{(b^2+k^2a^2)(k^2b^2+a^2)}+k^2b^2+a^2\\
2ka^2+2kb^2&\geqslant 2\sqrt{(b^2+k^2a^2)(k^2b^2+a^2)}\\
ka^2+kb^2&\geqslant\sqrt{k^2b^4+a^2b^2+k^4a^2b^2+k^2a^4}.\end{aligned}$$

Vėl gavome nelygybę, kurios abi pusės teigiamos, todėl galime dar kartą pakelti kvadratu:

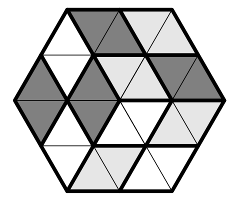
$$\begin{aligned}k^2a^4+2k^2a^2b^2+k^2b^4&\geqslant k^2b^4+a^2b^2+k^4a^2b^2+k^2a^4\\
2k^2a^2b^2&\geqslant a^2b^2+k^4a^2b^2\\
2k^2a^2b^2-a^2b^2-k^4a^2b^2&\geqslant 0\\
-a^2b^2(k^2-1)^2&\geqslant 0.\end{aligned}$$

Kairėje pusėje esantis reiškinys yra neigiamas visada išskyrus kai $k = 1$. Bet jei $k = 1$, tai įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, vadinasi toks keturkampis iš tiesų būtų lygiagretainis, o ne trapecija. Vadinasi, $k \neq 1$, o nelygybė yra neteisinga ir gauname prieštarą. Taigi iš tiesų tokios trapecijos pagrindų ilgių suma yra trumpesnė už šoninių kraštinių ilgių sumą. ◀

7 uždavinys. Izabelė ir Mykolas žaidžia žaidimą. Mykolas pasirenka bet kuriuos du gretimus (turinčius bendrą kraštinę) šešiakampės lentelės (žr. pav.) trikampius langelius ir sujungia jų centrus atkarpa. Tada Izabelė ir Mykolas paeiliui pratęsia esamą laužtę kurį nors vieną jos galą atkarpa sujungdami su gretimo trikampio langelio centru. Laužtę galima pratęsti tik į langelį, per kurį laužtė anksčiau nebuvo brėžta. Pavyzdžiui, paveiksle pavaizduota galima žaidimo situacija po trijų ėjimų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali pratęsti laužtės. Kaip žaisti Mykolui, kad jis visada laimėtų žaidimą?

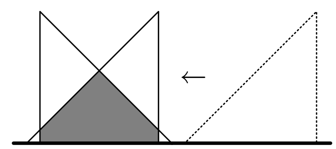


Sprendimas. Norėdamas laimėti žaidimą Mykolas turėtų sau mintyse suskirstyti visus trikampius langelius į gretimų langelių poras, pvz. taip, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje. Tada pirmojo ėjimo metu jis sujungia kurios nors pasirinktos langelių poros centrus. Izabelei pratęsus laužtę į kurį nors kitą langelį, Mykolas toliau laužtę pratęsia į šio langelio „porininką“.

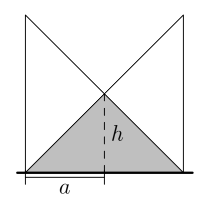


Taip po kiekvieno Mykolo ėjimo kiekvienos poros abu langeliai bus arba sujungti laužte, arba abu nesujungti, o po kiekvieno Izabelės ėjimo bus lygiai viena langelių pora, kurios viename langelyje bus laužtės galas, o per kitą dar nebus brėžta laužtė ir Mykolas visada galės pratęsti laužtę į šį langelį. ◀

8 uždavinys. Du lygūs statieji lygiašoniai trikampiai, kurių statinių ilgiai lygūs 1, stumiami išilgai tiesės (žr. pav.). Kokį didžiausią jų persidengimo plotą galima gauti?

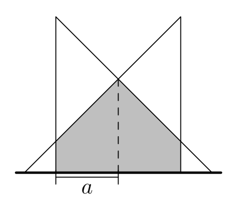


Sprendimas. Figūros, kurią persidengdami sudarys trikampiai, viena iš kraštinių priklausys pavaizduotai tiesei. Šios kraštinės ilgį pažymėkime $2a$. Figūra bus sudaryta arba iš dviejų simetriškų (ir todėl lygių) stačių trikampių (pav. dešinėje viršuje) arba iš dviejų simetriškų stačiųjų trapecijų (pav. dešinėje apačioje).



Pirmuoju atveju gautieji du trikampiai bus panašieji pradiniams, t. y. lygiašoniai, o jų statinių ilgiai lygūs a. Didžiausio ploto trikampius gausime, kai visiškai sutaps abiejų tiese slenkančių trikampių kraštinės. Tuomet $2a = 1, a = \frac{1}{2}$ ir figūros plotas $S = 2\frac{a \cdot a}{2} = a^2 = \frac{1}{4}$.
Antruoju atveju trapecijos aukštinė lygi a, trumpesnysis pagrindas lygus $1 - 2a$, o ilgesnysis – $1 - a$. Tada abiejų trapecijų plotas lygus

$$2 \cdot \frac{(1-a)+(1-2a)}{2} \cdot a = (2-3a) \cdot a = 2a - 3a^2.$$



Funkcija $f(x) = -3x^2 + 2x$, kai $x \in [0; 0,5]$ įgyja maksimumą taške $x = \frac{-2}{-2\cdot 3} = \frac{1}{3}$. Taigi didžiausio ploto persidengiančią figūrą gausime, kai $a = \frac{1}{3}$, tada figūros plotas bus lygus $\frac{2}{3} - 3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.
Taigi antruoju atveju gauname didesnį plotą. Didžiausias plotas, kurį galime gauti, yra $\frac{1}{3}$. ◀

9 uždavinys. Grupė vaikų ima obuolius nuo stalo. Pirmasis paima vieną obuolį ir dešimtadalį iš likusių obuolių. Antrasis vaikas paima du obuolius ir dešimtadalį iš likusių, ir t. t. Paskutiniajam vaikui paėmus obuolius stalas liko tuščias, o visi vaikai turėjo po lygiai obuolių. Kiek yra vaikų?

Sprendimas. Vaikų skaičių pažymėkime raide n ir nagrinėkime uždavinį „nuo galo“. Paskutinis, n-tasis vaikas nuo stalo paėmė n obuolių ir, suskaičiavęs, kad ant stalo dar liko x obuolių, pasiėmė sau dešimtadalį jų, t. y. iš viso n-tasis vaikas pasiėmė $n + \frac{x}{10}$ obuolių. Po šio veiksmo ant stalo turėjo likti $\frac{9}{10}x$ obuolių, tačiau iš sąlygos žinome, kad ant stalo neliko nė vieno obuolio. Vadinasi, $\frac{9}{10}x = 0$ ir $x = 0$, o n-tasis vaikas pasiėmė sau lygiai n obuolių.

Priešpaskutinis, $n-1$-asis, vaikas, nuo stalo pasiėmė $n-1$ obuolį ir dar dešimtadalį iš tuo metu likusiųjų. Bet mes taip pat žinome, kad iš viso jis pasiėmė lygiai tiek obuolių, kiek ir n-tasis vaikas, taigi n obuolių, o tai reiškia, kad dešimtadalį likusių obuolių tuo metu sudarė lygiai $n-(n-1) = 1$ obuolys. Vadinasi, tuo metu buvo likę 10 obuolių, ir kai priešpaskutinis vaikas pasiėmė 1 obuolį, ant stalo liko 9 obuoliai – tie patys, kuriuos visus paėmė paskutinis vaikas. Taigi $n = 9$. ◀

10 uždavinys. Antikos laikų didikas, likus vienai dienai iki rengiamos puotos, sužinojo, kad lygiai vienas iš 100 vyno butelių, kuriuos jis ruošėsi patiekti puotos metu, yra užnuodytas. Užnuodytam buteliui rasti buvo pasitelktos žiurkės, kurioms duodama ragauti vyno iš kelių butelių. Žiurkei sugirdžius lašelį užnuodyto vyno ši nugaištų likus valandai iki puotos pradžios. Kiek mažiausiai reikia žiurkių norint per vieną dieną išsiaiškinti, kuris butelis yra užnuodytas?

Sprendimas. Uždavinio sprendimo raktas – idėja, kad ne tik vienai žiurkei galima duoti vyno iš kelių skirtingų butelių, bet ir kiekvieno butelio vyno galima duoti kelioms skirtingoms žiurkėms, tokiu būdu, kad žinodami, kurios žiurkės nugaišo, o kurios ne, tiksliai galėtume pasakyti tą vieną vienintelį butelį, iš kurio ragavo visos nugaišusios žiurkės, bet neragavo nė viena iš likusių gyvų.

Pavyzdžiui, turėdami dvi žiurkes, A ir B, galime patikrinti keturis butelius: vyno iš pirmojo butelio neduoti nė vienai iš jų, duoti iš antrojo butelio – tik A, iš trečiojo – tik B, o iš ketvirtojo – ir A, ir B.

Turėdami tris žiurkes, A, B ir C, galime sudaryti dvigubai daugiau kombinacijų – iš viso 8. Kombinacijos pateiktos žemiau esančioje lentelėje:

Butelio nr.	A	B	C
1			
2	•		
3		•	
4	•	•	
5			•
6	•		•
7		•	•
8	•	•	•

Pastebėkime, kad su keturiomis žiurkėmis kombinacijų skaičius dar kartą padvigubėja: iš kiekvienos trijų žiurkių kombinacijos galime padaryti dvi: vieną su ketvirtąja žiurke ir vieną be jos. Taigi iš viso turime 16 kombinacijų. Toliau kombinacijų skaičius didėja lygiai taip pat, t. y. dvigubėja: su 5 žiurkėmis – 32, su 6 – 64, o su 7 – 128. Taigi 100 butelių patikrinti prireiks mažiausiai 7 žiurkių. ◀

Pastaba: galima spręsti ir trumpiau: tarkime, kad turėdami n žiurkių, kiekvieną kombinaciją galime užrašyti iš n nulių arba vienetų, kur i-toje vietoje esantis skaitmuo reikštų, ar i-tajai žiurkei duota vyno iš to butelio (tada žymime 1), ar ne (žymime 0). Pvz., (1000010) kombinacija reikštų, kad vyno iš 7 žiurkių buvo duota tik 1-ajai ir 6-ajai žiurkei. Kiek skirtingų kombinacijų galime sudaryti turėdami n žiurkių? Kiekvienai skaitmens pozicijai turime po du variantus (0 ir 1), todėl iš viso būtų $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ variantų. Nelygybę $2^n \geqslant 100$ tenkinantis mažiausias natūralus skaičius yra 7, taigi reikės 7 žiurkių.