SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ JUBILIEJINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2018-12-07

1. Besirpstant vyšnioms Suvalkijoj, raudonoms, kad iš to gražumo net nesugraudinamam Gelgaudišky apsiverkt gali, mokytojas Beinakaraitis kažkaip nejučia prisiminė savo pirmąjį spręstą probleminį skaičių teorijos uždavinį. Jame jis, tada dar visai paprastas berniukas, pamatęs 12 pirmųjų pirminių skaičių

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

turėjo susigaudyti, kokie yra du paskutinieji tokios sandaugos skaitmenys. Tuos du paskutiniuosius tos sandaugos skaitmenis Alvydas surado dar tą pačią dieną, kada, poeto žodžiais tariant, tokia tyla gyvybėn smelkias, kad nesidžiaugti uždaviniu tuos du sandaugos paskutinius skaitmenis suradęs tikrai negali. Taigi kokie yra tie du paskutinieji pirmųjų 12 pirminių skaičių sandaugos skaitmenys ir kaip juos surasti?

Sprendimas

Kiekvienas bent kiek geresnis tiek ir mokytojos Daivos, tiek ir mokytojo Alvydo, tiek ir bet kurio kito mokytojo mokinys, išvydęs toje pačioje sandaugoje dvejetą ir penketą, gerai žino, kad tokios sandaugos galas yra aiškus, arba kitaip sakant, jis žino, kad tokia sandauga baigiasi 0, nežiūrint to, kokie būtų kiti tokios sandaugos daugikliai.

Kaip gal sakytų suvalkiečiai „nulio tąsyk iš galo jau neišvysi, nulį gale visada išvysi“. Todėl gana būtų susigaudyti, kokiu skaitmeniu baigiasi likusių dešimties skaičių sandauga

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Toliau visiems minėtųjų mokytojų ir kitiems savarankiškai besimokantiems mokiniams yra aišku, kad šių dešimties dauginamųjų skaičių sandaugos paskutinis skaitmuo bus toks pats, koks bus jų paskutinių skaitmenų sandaugos paskutinis skaitmuo. Tai yra, mums pakaktų sužinoti paskutinį sandaugos

$$3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 7.$$

Dabar daugiklius 1 galime praleisti kaip įtakos sandaugos paskutiniam skaitmeniui neturinčius (nes jo nekeičiančius). Tada turėtume nustatyti sandaugos

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 7) = 21 \cdot 21 \cdot 27 \cdot 63$$

paskutinį skaitmenį, kuris yra toks pats, kaip jau tik keturių skaičių 1, 1, 7 ir 3 sandaugos

$$1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 3 = 21$$

paskutinis skaitmuo, kuris yra, suprantama. yra lygus 1.

Atsižvelgiant į tai, kas yra sakoma pirmame sprendimo sakinyje, mes suradome, kad du paskutinieji sandaugos skaitmenys yra 1 ir 0, arba, kad tų dvylikos pirmųjų pirminių skaičių sandauga baigiasi skaitmenimis 10.

Atsakymas

Dvylikos pirmųjų pirminių skaičių sandauga baigiasi skaitmenimis 10.

2. Amžinojoje Suvalkijos sostinėje dirbo toks didžiulis viršininkas, vardu Antanas, kuris gyveno kukliame namelyje visai netoli Vilkaviškio. Kiekvieną darbo dieną griežtai nustatytu laiku prie jo namelio durų sustodavo automobilis, kurį vairuodavo Bešvilpaujantis vairuotojas Vilius Vilkauskas, kuris ir veždavo viršininką Antaną į darbą. Sykį, ar tai dėl laikrodžio persukinėjimų, ar dėl kokių kitų nepakeičiamų aplinkybių viršininkas Antanas išėjo važiuoti lygiai viena valanda anksčiau, negu paprastai. Suvokęs tai ir žinodamas, kad jo ištikimasis vairuotojas, Bešvilpuojantis vairuotojas Vilius, tikrai išvažiuos iš Marijampolės garažų paimti jo įprastiniu laiku, viršininkas Antanas nusprendė eiti jam priešais. Jiems susitikus Antanas iš karto sėdo mašinon ir važiavo darban, į kurį jis tą dieną atvyko ištisas 20 minučių anksčiau negu paprastai. Kiek minučių viršininkas Antanas ėjo pėsčias, jeigu jis vaikšto vienodu greičiu, o jo vairuotojas Vilius net ir važiuoti sugeba visą laiką vienodu greičiu ir, be to, nesugaišta nė sekundės apsisukinėdamas?

Sprendimas

Jeigu pasipaišytume kokią nors jų judėjimo schemą, tai būtų visiškai aišku, kad tą jų kelio dalį, kurią valanda anksčiau atsidūręs trasoje viršininkas Antanas spės sukarti iki susitikimo su vairuotoju, „normalią“ dieną jo vairuotojas turėtų įveikti du kartus – nuvažiuodamas pas viršininką ir kitą kartą, grįždamas kartu su juo. Tam jis ir išeikvotų tas 20 minučių, kurias dabar šią neeilinę dieną jiedu „sutaupė“. Vadinasi, tą „viengubą“ kelio dalį, kurią sukaria viršininkas Antanas eidamas pasitikti vairuotojo, vairuotojas Vilius važiuotų 10 minučių. Bet tada matome, kad viršininkas Antanas priešpriešiais turi būti ėjęs 60 – 10 = 50 minučių.

Formaliau kalbant, reikalai susiveda į pasakymą, kad toji valanda, kurią pelnė viršininkas Antanas, anksčiau išeidamas važiuoti darban, susideda iš dar nežinomo jo ėjimo laiko t iki susitikimo su vairuotoju ir to laiko, kurį vairuotojas būtų sugaišęs, po susitikimo vis tiek važiuodamas iki Antano namų (Viliui atsidūrus prie namų įprastu metu, toji papildoma valanda jau ir būtų praėjusi). Todėl turime lygtį

$$60 = t + 20/2,$$

arba

$$t = 50.$$

Atsakymas

Viršininkas Antanas ėjo pasitikinėdamas 50 minučių.

3. Keturnaujienoje žmonės labai mėgsta pildyti keturkampes lenteles, o patį didžiausią pasisekimą toje legendinėje vietoje numanomai turi 4 × 4 matmenų lentelės. Paskutinės lentelių pildymo mados klyksmas yra paimti tokią tuščią lentelę ir užpildyti ją visą, į kiekvieną langelį įrašant po vieną skaitmenį nuo 1 iki 9. Tokia visiškai užpildyta lentelė yra vadinama *lig pašaknų pjaunančia širdį*, jeigu kiekviename jos 3 × 3 kvadrate įrašytų devynių skaičių suma dalijasi iš 9. Nenuostabu, kad, stiprėjant globalizmo tendencijoms, Keturnaujienoje negalėjo neiškilti raktinis klausimas: o kiek gi tokių lig pašaknų pjaunančių širdį 4 × 4 lentelių esama iš viso?

Sprendimas

Truputį pasukus galvą galima „dasigalvoti“ iki tokių „subtilybių“.

Imkime tokią 4 × 4 lentelę

ir pasižiūrėkime į du kairiausius jos stulpelius ir į dvi žemiausias jos eilutes. Bet kaip pasirinkime jų skaičius ir pažymėkime juos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ir L.

Tada turėsime lentelę:

A	B		
C	D		
E	F	G	H
I	J	K	L

Likusias 4 neužpildytas vietas pažymėkime simboliais X, Y, Z ir T.

Tada „jau visa užpildyta užpildyta lentelė“ būtų tokia:

A	B	Y	T
C	D	X	Z
E	F	G	H
I	J	K	L

Dabar sprendimo pabaiga jau visai arti – užtenka tik pastebėti, kad skaičius A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ir L mes galime rinktis kaip tinkami – 12 skaičių bet kaip, likę skaičiai X, Y, Z ir T tada nustatomi vieninteliu būdu.
Tikrai, apatiniame kairiajame lentelės 3 × 3 kvadrate po 12 skaičių A, ..., L pasirinkimo mes turėtume vienintelį būdą pasirinkti skaičių X taip, kad visų 9 jo skaičių suma dalytųsi iš 9.
Vieninteliu būdu pasirinkę skaičių X, mes kairiajame viršutiniame bei dešiniajame apatiniame 3 × 3 kvadratuose vėl turėtume parinktus 8 skaitmenis ir vėl vienu vieninteliu būdu galėtume parinkti dar neparinktus skaitmenis Y ir Z taip, kad ir šių 3 × 3 kvadratų visų devynių skaičių suma dalytųsi iš 9.
Galiausiai liktų dar neparinktas vienintelis dešiniojo viršutinio 3 × 3 kvadrato skaičius T, kurį ir vėl galėtume parinkti vienu vieninteliu būdu, jeigu norėtume, kad visų jo skaitmenų suma dalytųsi be liekanos iš 9.
Todėl matome, kad rinktis 12 minėtųjų skaitmenų

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L ir M

galime absoliučiai laisvai, ir po to likę 4 skaitmenys yra nustatomi vieninteliu būdu. Kadangi bet kuris iš skaitmenų

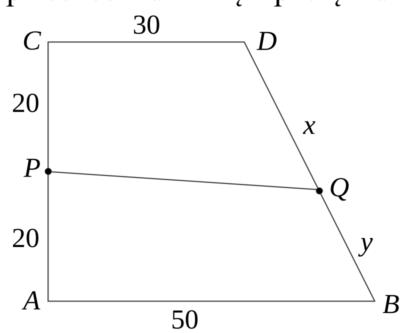
A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L ir M

gali būti paimamas arba parenkamas 9 būdais, tai, remiantis kombinatoriniu daugybos principu, Suvalkijoje neretai vadinamu „skrybėlaičių-rankinukų-batelių pasirinkimo gausos“ metodu, lentelių turėtume lygiai

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^{12}.$$

Atsakymas
Tokių lentelių, teisingai sprendžiant Keturnaujienoje ir kitur, galima būtų sudaryti 9 dvyliktame laipsnyje arba iš viso 282 429 536 481 tokias lenteles.

4. Beševilpaujantis Berniokas, nelyginant „širdį tarsi dobilą“, sykį pjovė stačiąją trapeciją *ABCD*, kurios pagrindai yra 30 ir 50, o trumpesnysis šonas 40, į dvi keturkampes lygiaplotes dalis taip, kaip tai yra parodyta brėžinyje. Perpjovęs ją, jis nuščiuvo išvydęs, kad „kažko nėra, kažko nėra – lyg artimų“ ir puolė ieškoti brėžinyje grėsmingais simboliais x ir y pažymėtų atkarpų santykio x / y ir po dramatiškos paieškos dar tą pačią dieną surado jį. Kam lygus tas lemtingasis santykis x / y?



Sprendimas
Pirmiausiai pastebėkime, kad trapecijos plotas yra lygus jos abiejų (lygiagrečių) pagrindų sumos pusei, padaugintai iš aukštinės. Mūsų atveju tas plotas būtų

$$S = ((30 + 50) / 2) \cdot (20 + 20) = 40 \cdot 40 = 1600.$$

Todėl abiejų keturkampių ABQP ir PCDQ, į kuriuos yra perpjauta trapecija, plotas yra po 1600 : 2 = 800.

Sujunkime atkarpomis tašką P su taškais B ir D. Tada trikampiai PCD ir PAB yra statieji ir jų plotai S(PCD) ir S(PAB) yra lygūs pusei jų statinių sandaugos. Todėl S(PAB) = 20 · 50 : 2 = 1000 : 2 = 500 ir S(PCD) = 20 · 30 : 2 = 600 : 2 = 300.

Todėl trikampio DPQ plotas S(DPQ) gali būti gautas iš keturkampio PCDQ ploto atėmus stačiojo trikampio PCD plotą, arba, kitais žodžiais,

$$S(DPQ) = S(PCDQ) – S(PCD) = 800 – 300 = 500.$$

Panašiai

$$S(BPQ) = S(PABQ) – S(PAB) = 800 – 500 = 300.$$

Esame prašomi surasti atkarpų DQ ir QB ilgių santykį. Mes turime „ant tų atkarpų“ sukonstruotus trikampius DQP ir BQP su bendra viršūne taške P, kurių plotus mes ką tik neva netyčia suskaičiavome. Bet tada tokių trikampių su plotais 500 ir 300 plotų santykis ir yra lygus (dėl bendros aukštinės) jų pagrindų santykiui, kurio mes kaip tik ir ieškome.

Todėl

$$S(DPQ) : S(BPQ) = 500 : 300 = 5 : 3 = DQ : BQ.$$

Atsakymas

Lemtingasis santykis x / y yra 5 / 3.